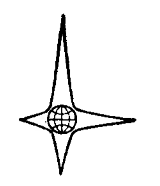


ИЗДАТЕЛЬСТВО
«МИР»

LAURENT SCHWARTZ

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

MÉTHODES MATHÉMATIQUES POUR LES SCIENCES PHYSIQUES

Avec le concours de Denise Huet

HERMANN, 115, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS VI

1961

ЛОРАН ШВАРЦ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

С участием Дениз Юэ

Перевод с французского
Ф. В. ШИРОКОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1965

УДК 517.5/.9

Книга Л. Шварца, одного из создателей теории распределений (обобщенных функций), является элементарным учебником по этому разделу математики. В ней впервые в русской учебной литературе излагаются с точки зрения теорий обобщенных функций такие разделы, как, например, теория преобразования Лапласа и операционное исчисление, и даются *физические приложения теории.* Систематическое изложение основных разделов анализа (ряды и интегралы Фурье, операционное исчисление, простейшие уравнения математической физики и пр.) и многочисленные примеры и задачи делают книгу незаменимым учебным пособием как для потребителей математики, так и для профессионалов-математиков.

Радиоинженер найдет в ней операционное исчисление и преобразования Фурье, физику-теоретику она будет интересна вся, преподаватель пединститута или технического вуза сможет читать по ней специальный курс для студентов. Многие разделы этой книги войдут в программу подготовки аспирантов технических вузов.

Книга рассчитана на читателей со скромной математической подготовкой (первые два курса технического вуза). По существу она пригодна даже для первоначального знакомства с рядом разделов математики.

Особую ценность представляют задачи (131 задача, не считая примеров в тексте), от простейших до достаточно сложных. Таким образом, книга может служить и первым в мировой литературе задачником по этой новой теории.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

После работ французской математической школы в начале века в математику вошли понятия измеримости и суммируемости по Лебегу. Теория функций вещественного переменного, с одной стороны, завершила логические исследования Коши, Абеля и Вейерштрасса, а с другой — сделала огромный шаг по пути к тому идеалу, к которому с момента своего зарождения стремился Анализ.

Возможность производить „без всяких ограничений“ „любые“ действия над аналитическими объектами, дифференцировать и интегрировать функции, суммировать ряды и т. п. сильно расширилась с введением основных понятий теории меры и интеграла.

Не говоря о таких специальных дисциплинах, как эргодическая теория, которая была бы попросту невозможна без теории меры, даже в „обычный“ анализ, в исследование таких классических объектов, как специальные функции, теория функций вещественного переменного внесла огромные упрощения. Это хорошо знакомо каждому, кто занимался анализом с этой более высокой точки зрения.

Сейчас мы являемся свидетелями следующего огромного шага по пути к идеалу Анализа. С возникновением теории обобщенных функций в работах С. Л. Соболева и Л. Шварца математика сильно расширила диапазон „законных“ аналитических действий. Дальнейшие исследования И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова, Л. Хёрмандера, Л. Гординга и др. привели к тому, что сейчас построение таких обширных разделов, как теория дифференциальных операторов с частными производными или теория преобразований Фурье, уже невозможно без теории обобщенных функций. Новое освещение получили многие факты классического анализа, например формула суммирования Пуассона. Найдены „естественные“ границы тех или иных аналитических операций. Широко развилась теория линейных топологических пространств, более естественных во многих вопросах анализа, чем нормируемые пространства.

Математика пока еще бедна монографиями и учебниками (мы не говорим о статьях!) по теории обобщенных функций. Основные теоретические монографии — книга Шварца „Théorie des distributions“, т. I, II (второе

издание: Париж, 1959), и „Обобщенные функции“, вып. I — V, И. М. Гельфанда и др.

Предлагаемая вниманию читателя книга Шварца „Математические методы для физических наук“ представляет собой элементарный учебник по теории обобщенных функций.

Мы должны здесь разъяснить терминологию. В зарубежной математической литературе принят термин „distribution“ — „распределение“, введенный Л. Шварцем по аналогии с физическими „распределениями“ масс, зарядов и т. п. В советской литературе принят термин „обобщенная функция“.

Мы придерживались в переводе термина Шварца, воздавая тем самым должное автору.

Помимо пиэтета, здесь сыграло роль еще и то существенное обстоятельство, что без этого термина некоторые места книги были бы просто непереводимы, например сравнение „математических“ распределений с „физическими“.

Итак, книга Л. Шварца — элементарный учебник по теории распределений — обобщенных функций.

Предполагается, что читатель владеет основными понятиями анализа в объеме двух-трех лет стандартного курса анализа. Все остальное определяется и доказывается в книге. Героем первой вводной главы книги является „принцип Фубини“: „сумма“ неотрицательных „слагаемых“ не зависит от порядка „суммирования“. Некоторые факты в этой теоретико-функциональной главе только формулируются, но не доказываются; читателю, который хотел бы познакомиться с подробными доказательствами этих отдельных фактов, мы рекомендуем обратиться к книге И. П. Натансона „Теория функций вещественной переменной“, второе издание, Гостехиздат, М., 1957 г. В дальнейших главах книги используются элементарные сведения из теории функций комплексного переменного, например теорема о вычетах и понятие аналитического продолжения. С этими фактами читатель может познакомиться по книге М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата „Методы теории функций комплексного переменного“, третье издание, „Наука“, М., 1965 г. В остальном книга Л. Шварца замкнута в себе. Читатель научится производить основные действия с распределениями, работать со сверточными уравнениями, рядами и интегралами Фурье, работать с интегралом Лапласа и т. д. Читатель познакомится также с некоторыми приложениями теории к простейшим физическим задачам (уравнение колебаний струны, акустические трубы, волновое уравнение, уравнение теплопроводности).

Упражнения, которыми сопровождается каждая глава, позволят читателю активно овладеть теоретическим материалом.

Очень ценна большая свежесть этих упражнений (см., например, формулы Фейнмана в упражнениях к первой главе). Среди упражнений имеются

и упражнения особого рода, представляющие собой маленькие теоретические исследования; они особенно полезны.

В русском переводе были исправлены довольно многочисленные опечатки французского издания и внесены незначительные (и очень редкие) изменения в текст. Во время своего пребывания в Москве осенью 1964 г. проф. Л. Шварц просмотрел исправления, внесенные переводчиком в русское издание. В двух или трех местах обоснования автора были недостаточны, однако мы не вносили в них изменений, ибо это утяжелило бы стиль книги.

Книга написана прозрачно. Основная ее цель — *приучить читателя к теории распределений* — великолепно достигнута автором.

Ф. Широков.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В предлагаемой книге рассматриваются математические методы физики. В этом смысле она не является сборником „рецептов“, предназначенных для более или менее сознательного употребления. Объекты, которые встречаются здесь, являются объектами математическими, точно определяемыми. Их элементарные свойства доказываются, а примеры, заимствованные из физических наук, показывают, как эти свойства можно использовать.

Эта элементарная и краткая книга не претендует на роль настоящей монографии; поэтому в вопросах, которые потребовали бы слишком длинных рассуждений, мы приводим только основные результаты и притом без доказательства.

Знания, необходимые для того, чтобы читать эту книгу с пользой, сводятся к материалу обычных вводных курсов, дополненному некоторыми понятиями из линейной алгебры и из теории функций одного комплексного переменного.

В конце каждой главы читателю предлагаются упражнения. Эти упражнения расположены по возможности в порядке возрастающей трудности. Некоторые из них служат просто для применения основного материала книги, другие же касаются новых вопросов. Но все упражнения — на уровне экзаменов по математическим методам физики парижского Факультета наук.

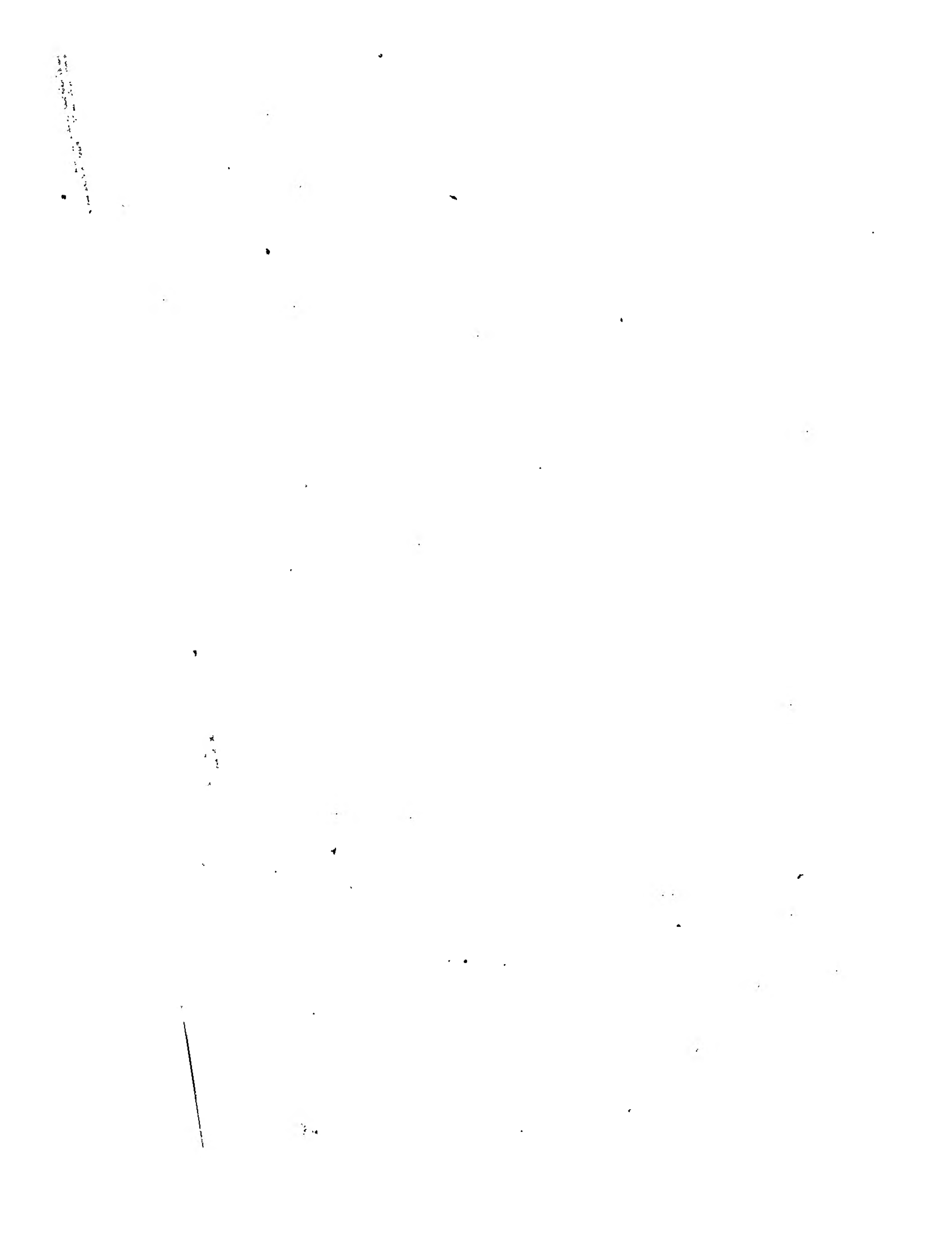
Я хочу поблагодарить Дениз Юэ, которая снабдила некоторыми дополнениями предварительный вариант моих тетрадей по математическим методам физики [1], а также полностью отредактировала §§ 2 и 3 гл. VII, гл. IX и все упражнения. Формулировки упражнений частично принадлежат Гурдэну, Аннекэну и Треву [2].

Лоран Шварц

---

[1]) Centre de Documentation Universitaire, Paris.

[2]) Association Corporative des Étudiants en Sciences, Paris.



Г Л А В А I

ДОПОЛНЕНИЯ К ИНТЕГРАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ: РЯДЫ И ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. *Дополнительные сведения о рядах*

1. Суммируемые ряды. Понятие суммируемости является обобщением понятия абсолютной сходимости на случай, когда члены ряда занумерованы произвольным множеством индексов I и когда тем самым члены ряда не упорядочены.

Члены ряда могут быть как вещественными, так и комплексными; для простоты мы будем считать их вещественными.

Определение. Пусть I — произвольное множество индексов и $(u_i)_{i\in I}$ — семейство вещественных чисел, параметризованное множеством I. Ряд

$$\sum_{i\in I} u_i$$

называют суммируемым к сумме S и пишут

$$\sum_{i\in I} u_i = S, \qquad \text{(I, 1; 1)}$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует *конечное* подмножество значений индекса $J\subset I$, такое, что для любого конечного подмножества значений индекса $K\supset J$ выполняется неравенство

$$|S - S_K| \leqslant \varepsilon, \qquad \text{(I, 1; 2)}$$

где

$$S_K = \sum_{i\in K} u_i. \qquad \text{(I, 1; 3)}$$

Замечание. Каково бы ни было множество индексов I, ряд $\sum\limits_{i\in I} u_i$ будет суммируем и притом к сумме нуль, если все u_i равны нулю.

Свойства суммируемых рядов

Предложение 1. (Единственность суммы.) *Если*

$$\sum_{i \in I} u_i = S \quad \text{и} \quad \sum_{i \in I} u_i = S',$$

то

$$S' = S.$$

В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ существуют такое $J_1 \subset I$, что при $K \supset J_1$ выполняется неравенство $|S - S_K| \leqslant \varepsilon$, и такое $J_2 \subset I$, что при $K \supset J_2$ выполняется неравенство $|S' - S_K| \leqslant \varepsilon$. Положим $K \supset J_1 \cup J_2$, тогда одновременно $|S - S_K| \leqslant \varepsilon$ и $|S' - S_K| \leqslant \varepsilon$ и, следовательно, $|S - S'| \leqslant 2\varepsilon$. Поскольку ε произвольно, имеем $S = S'$. Ч. и т. д.

Предложение 2. *Если ряды* $\sum_{i \in I} u_i$ *и* $\sum_{i \in I} v_i$ *суммируемы к суммам* S *и* T *соответственно, то ряд* $\sum_{i \in I} (\lambda u_i + \mu v_i)$, *где* λ *и* μ — *постоянные, суммируем и притом к сумме* $\lambda S + \mu T$.

В самом деле, для данного $\varepsilon > 0$ существуют такое конечное множество индексов $J_1 \subset I$, что для любого конечного множества индексов $K_1 \supset J_1$ выполняется неравенство

$$|S - S_{K_1}| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|},$$

и такое конечное множество индексов $J_2 \subset I$, что для любого конечного множества индексов $K_2 \supset J_2$ выполняется неравенство

$$|T - T_{K_2}| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|}.$$

Следовательно, для любого конечного множества индексов $K \supset J_1 \cup J_2$ имеем

$$|\lambda S - \lambda S_K| \leqslant \frac{|\lambda|\,\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|} \quad \text{и} \quad |\mu T - \mu T_K| \leqslant \frac{|\mu|\,\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|},$$

откуда

$$|(\lambda S + \mu T) - (\lambda S_K + \mu T_K)| \leqslant \varepsilon.$$

Ч. и т. д.

Предложение 3. (Ряды с положительными членами.) *Пусть все* $u_i \geqslant 0$. *Для того чтобы ряд*

$$\sum_{i \in I} u_i$$

был суммируем, необходимо и достаточно, чтобы все частичные суммы S_K, соответствующие конечным подмножествам K множества I, были ограничены фиксированным числом $M > 0$; в этом случае

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup_{K \text{ конечно}} (S_K). \qquad (I, 1; 4)$$

В самом деле, предположим сначала, что ряд суммируем. Тогда числу ε, равному, скажем, 1, соответствует такое конечное подмножество J, что для любого конечного $K \supset J$ имеем

$$S_K \leqslant S + 1. \qquad (I, 1; 5)$$

Если же K — произвольное конечное множество значений индекса, то положим $K_1 = J \cup K$. Тогда будем иметь

$$S_K \leqslant S_{K_1} \leqslant S + 1, \qquad (I, 1; 6)$$

поэтому все суммы S_K ограничены.

Обратно, предположим, что все S_K ограничены; пусть B их верхняя грань. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное подмножество $J \subset I$, что

$$B - \varepsilon \leqslant S_J \leqslant B. \qquad (I, 1; 7)$$

Для любого конечного $K \supset J$ будем иметь

$$B - \varepsilon \leqslant S_K \leqslant B. \qquad (I, 1; 8)$$

Следовательно, ряд $\sum_{i \in I} u_i$ суммируем и имеет своей суммой число B.

Предложение 4. (Критерий Коши, доказательство см. ниже.) *Для того чтобы ряд $\sum_{i \in I} u_i$ был суммируем, необходимо и достаточно, чтобы u_i удовлетворяли критерию Коши:*

каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое конечное $J \subset I$, что для любого конечного множества K значений индекса, не имеющего общих элементов с J [1]*, выполняется неравенство*

$$|S_K| \leqslant \varepsilon. \qquad (I, 1; 9)$$

Предложение 5. (Следствие из критерия Коши.) *Если ряд $\sum_{i \in I} u_i$ суммируем, то всякий частичный ряд $\sum_{i \in J} u_i$, где J — произвольное подмножество I, является суммируемым.*

---

[1]) То есть для любого конечного $K \subset I - J$.

Если J — конечное подмножество I, такое, что для конечных $K \supset J$ выполняется неравенство

$$|S - S_K| \leqslant \varepsilon, \tag{I, 1; 10}$$

то это же неравенство выполняется и для бесконечных $K \supset J$.

Если подмножества $J_1, J_2, \ldots, J_n \subset I$ не имеют общих элементов и $J = J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_n$, то

$$S_J = S_{J_1} + S_{J_2} + \ldots + S_{J_n} \tag{I, 1; 11}$$

при условии, что хотя бы одна из частей этого равенства имеет смысл.

Предложение 6. (Вывод из критерия Коши.) *Для того чтобы ряд $\sum_{i \in I} u_i$ был суммируем, необходимо и достаточно, чтобы был суммируем ряд $\sum_{i \in I} |u_i|$; при этом*

$$\left| \sum_{i \in I} u_i \right| \leqslant \sum_{i \in I} |u_i|. \tag{I, 1; 12}$$

Если $\sum_{i \in I} v_i$ — суммируемый ряд с положительными членами и если

$$|u_i| \leqslant v_i, \tag{I, 1; 13}$$

то ряд $\sum_{i \in I} u_i$ суммируем и при этом

$$\left| \sum_{i \in I} u_i \right| \leqslant \sum_{i \in I} v_i. \tag{I, 1; 14}$$

Доказательства предложений 4, 5, 6.

1°. Если ряд $\sum_{i \in I} u_i$ суммируем, то выполнен критерий Коши. В самом деле, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое конечное $J \subset I$, что для любого конечного K, не имеющего общих элементов с J, одновременно выполняются неравенства

$$|S_J - S| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |S_{J \cup K} - S| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{I, 1; 15}$$

Отсюда имеем

$$|S_{J \cup K} - S_J| \leqslant \varepsilon. \tag{I, 1; 16}$$

Но

$$S_{J \cup K} - S_J = S_K, \tag{I, 1; 17}$$

откуда

$$|S_K| \leqslant \varepsilon. \tag{I, 1; 18}$$

2°. Если некоторый ряд удовлетворяет критерию Коши, то всякий его частичный ряд a fortiori удовлетворяет критерию Коши. Это очевидно. В частности, это выполняется для частичного ряда, образованного из членов $u_i \geqslant 0$, и для частичного ряда из $u_i \leqslant 0$.

3°. Если некоторый ряд с членами $\geqslant 0$ (или с членами $\leqslant 0$) удовлетворяет критерию Коши, то он суммируем. В самом деле, непосредственно очевидно, что частичные суммы ограничены, и поэтому достаточно воспользоваться предложением 3.

Комбинируя 2° и 3°, видим, что если некоторый ряд удовлетворяет критерию Коши, то ряд из его положительных членов и ряд из его членов $\leqslant 0$ суммируемы. Для вещественного числа x положим

$$\left.\begin{array}{llll} x^+ = x, & \text{если } x \geqslant 0; & x^+ = 0, & \text{если } x \leqslant 0; \\ x^- = -x, & \text{если } x \leqslant 0; & x^- = 0, & \text{если } x \geqslant 0. \end{array}\right\} \qquad (I, 1; 19)$$

Тогда

$$\begin{gathered} x^+ \geqslant 0, \quad x^- \geqslant 0, \\ x = x^+ - x^-, \quad |x| = x^+ + x^-. \end{gathered} \qquad (I, 1; 20)$$

Тогда если ряд $\sum_{i \in I} u_i$ удовлетворяет критерию Коши, то, как мы только что видели, оба ряда $\sum_{i \in I} u_i^+$ и $\sum_{i \in I} u_i^-$ суммируемы. Отсюда мы заключаем, что их разность, т. е. ряд $\sum_{i \in I} u_i$, суммируема. Этим в комбинации с пунктом 1° доказано предложение 4. Кроме того, отсюда же мы заключаем, что суммируем ряд $\sum_{i \in I} |u_i|$ и что имеет место неравенство (I, 1; 12).

Обратно, если ряд $\sum_{i \in I} |u_i|$ суммируем, то его частичные суммы ограничены и, следовательно, суммируемы оба ряда $\sum_{i \in I} u_i^+$ и $\sum_{i \in I} u_i^-$, а, значит, суммируема и их разность $\sum_{i \in I} u_i$. Этим доказана первая часть предложения 6. Вторая часть тогда очевидна, ибо если ряд $\sum_{i \in I} v_i$ суммируем, то его частичные суммы ограничены, а, значит, a fortiori ограничены и частичные суммы ряда $\sum_{i \in I} |u_i|$. Неравенство (I, 1; 14) вытекает при этом из (I, 1; 12).

4°. Остается доказать предложение 5. Если ряд $\sum_{i \in I} u_i$ суммируем, то он удовлетворяет критерию Коши; тогда его частичные ряды a fortiori удовлетворяют критерию Коши (см. 2°) и, значит, суммируемы.

Пусть J — такое конечное множество индексов, что для любого конечного $K_1 \supset J$ выполняется неравенство

$$|S - S_{K_1}| \leqslant \varepsilon. \qquad (I, 1; 21)$$

Тогда если K — некоторое бесконечное множество значений индекса, содержащее J, то для любого $\eta > 0$ существует конечное множество K_1, $J \subset K_1 \subset K$, такое, что

$$|S_K - S_{K_1}| \leqslant \eta \qquad (I, 1; 22)$$

(по определению суммируемости ряда $\sum\limits_{i \in K} u_i$). Таким образом, имеем

$$|S_K - S_{K_1}| \leqslant \eta, \quad |S - S_{K_1}| \leqslant \varepsilon, \qquad (I, 1; 23)$$

значит

$$|S - S_K| \leqslant \varepsilon + \eta, \qquad (I, 1; 24)$$

и, поскольку η произвольно,

$$|S - S_K| \leqslant \varepsilon \qquad (I, 1; 25)$$

(при бесконечном K). Наконец, та часть предложения 5, которая относится к разбиению

$$J = J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_n,$$

является очевидной.

Замечание. Применим критерий Коши к множеству $K \subset I$, не имеющему общих элементов с J и сводящемуся к *одному, единственному элементу* k. Имеем $|S_K| = |u_k| \leqslant \varepsilon$. Таким образом:

Если ряд $\sum\limits_{i \in I} u_i$ *суммируем, то, каково бы ни было* $\varepsilon > 0$, *существует такое конечное подмножество* J *множества* I, *что для любого* $k \notin J$ *выполняется неравенство* $|u_k| \leqslant \varepsilon$.

Это утверждение можно сформулировать так:

Если ряд $\sum\limits_{i \in I} u_i$ *суммируем, то его общий член* u_i *стремится к нулю* (понятие, не зависящее от порядка членов).

Предложение 7. *Пусть* $J_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ — *последовательность подмножеств множества* I, *конечных или бесконечных, такая, что для любого конечного* $J \subset I$ *множество* J_n *будет содержать* J *при всех достаточно больших* n. *Тогда если ряд* $\sum\limits_{i \in I} u_i$ *суммируем к сумме* S, *то последовательность* S_{J_n} *сходится к* S *при* $n \to \infty$.

В самом деле, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое конечное $J \subset I$, что для любого K (конечного или бесконечного), содержащего J, выполняется неравенство

$$|S - S_K| \leqslant \varepsilon. \tag{I, 1; 26}$$

Пусть n_0 таково, что при $n \geqslant n_0$ множество J_n содержит J; тогда при $n \geqslant n_0$ имеем

$$|S - S_{J_n}| \leqslant \varepsilon. \tag{I, 1; 27}$$

Ч. и т. д.

Предложение 8. (Суммируемость и абсолютная сходимость.) *Если множество индексов I совпадает с множеством N целых неотрицательных чисел, то для суммируемости ряда $\sum_{i \in I} u_i$ необходимо и достаточно, чтобы этот ряд абсолютно сходился. При этом его сумма в смысле теории суммируемых рядов совпадает с его суммой в смысле теории сходящихся рядов.*

В самом деле, предположим, что ряд $\sum_{i \in I} u_i$ суммируем. Тогда $\sum_{i \in I} |u_i|$ также суммируем. Обозначим через J_n подмножество, составленное из целых чисел $0, 1, 2, \ldots, n$.

Предложение 7, примененное к ряду $\sum_{i \in I} |u_i|$, показывает, что величины $\sum_{0 \leqslant \nu \leqslant n} |u_\nu|$ имеют предел при $n \to \infty$, поэтому ряд абсолютно сходится. То же самое предложение 7, примененное к ряду $\sum_{i \in I} u_i$, показывает, что

$$\lim_{n \to \infty} S_{J_n} = S, \tag{I, 1; 28}$$

т. е. суммы в смысле обеих теорий совпадают (S_{J_n} это то, что в теории сходящихся рядов обозначается через S_n).

Обратно, предположим, что ряд абсолютно сходится. Тогда частичные суммы $\sum_{0 \leqslant \nu \leqslant n} |u_\nu|$ ограничены, откуда сразу же следует, что все частичные суммы S_J (J — конечно и содержится в I) ряда $\sum_{i \in I} |u_i|$ ограничены; поэтому ряд $\sum_{i \in I} |u_i|$ суммируем и, следовательно, суммируем ряд $\sum_{i \in I} u_i$.

Вывод. Если некоторый ряд абсолютно сходится, то он остается абсолютно сходящимся и сохраняет свою сумму при изменении порядка его членов.

В самом деле, ряд при этом условии является суммируемым, а суммируемость, так же как и сумма, не зависит от порядка членов.

Суммирование пачками или ассоциативность

Предложение 9. *Предположим, что множество индексов I является объединением семейства подмножеств I_α $(\alpha \in A)$:*

$$I = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha, \tag{I, 1; 29}$$

причем эти подмножества попарно не имеют общих элементов[1]. *Тогда если ряд $\sum_{i \in I} u_i$ суммируем, то каждый из рядов $\sum_{i \in I_\alpha} u_i$ суммируем к сумме σ_α, ряд $\sum_{\alpha \in A} \sigma_\alpha$ в свою очередь суммируем, причем*

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{\alpha \in A} \sigma_\alpha = \sum_{\alpha \in A} \left(\sum_{i \in I_\alpha} u_i \right). \tag{I, 1; 30}$$

Доказательство. Тот факт, что каждый из рядов $\sum_{i \in I_\alpha} u_i$ суммируем, вытекает из предложения 5.

Поскольку ряд $\sum_{i \in I} u_i$ суммируем, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное множество индексов $J \subset I$, что если K — конечное или бесконечное множество индексов, содержащее J, то выполняется неравенство

$$|S - S_K| \leqslant \varepsilon.$$

Пусть B — конечное подмножество A, образованное всеми индексами $\alpha \in A$, такими, что $I_\alpha \cap J \neq \varnothing$. Тогда, каково бы ни было конечное подмножество C множества A, содержащее B, объединение $\bigcup_{\alpha \in C} I_\alpha$ будет подмножеством $K \subset I$, содержащим J, и, таким образом,

$$\left| S - \sum_{i \in \bigcup_{\alpha \in C} I_\alpha} u_i \right| \leqslant \varepsilon. \tag{I, 1; 31}$$

Но в силу последней части предложения 5

$$\sum_{i \in \bigcup_{\alpha \in C} I_\alpha} u_i = \sum_{\alpha \in C} \sigma_\alpha, \tag{I, 1; 32}$$

[1] То есть они таковы, что $I_\alpha \cap I_\beta = \varnothing$, где $\varnothing$ — пустое множество.

поскольку C конечно; тем самым

$$\left|S - \sum_{\alpha \in C} \sigma_\alpha\right| \leqslant \varepsilon, \qquad (I, 1; 33)$$

и, значит, ряд $\sum_{\alpha \in A} \sigma_\alpha$ суммируем к сумме S.

Ч. и т. д.

Внимание: *обратное не справедливо.* Может случиться, что каждый из рядов $\sum_{i \in I_\alpha} u_i$ суммируем к сумме σ_α и что ряд $\sum_{\alpha \in A} \sigma_\alpha$ суммируем, но ряд $\sum_{i \in I} u_i$ не суммируем. В этом случае, если B — некоторое другое множество индексов, а $(I_\beta)_{\beta \in B}$ — другое разбиение I на множества, не имеющие попарно общих элементов, то может оказаться, что каждое из выражений

$$\sum_{\alpha \in A} \left(\sum_{i \in I_\alpha} u_i\right) \quad \text{и} \quad \sum_{\beta \in B} \left(\sum_{i \in I_\beta} u_i\right) \qquad (I, 1; 34)$$

имеет смысл, но что их значения не совпадают.

Пример. Пусть A — множество всех целых чисел $n \geqslant 0$. Каждому $\alpha = n$ соответствует I_α, образованное из двух элементов n и $-n$ (из одного элемента, если $n = 0$); $I = \bigcup_\alpha I_\alpha$ — множество всех целых чисел любого знака. Для целого $i \in I$ положим $u_i = i$. Тогда ряд $\sum_{i \in I} u_i$ не суммируем, поскольку

$$\sum_{i \geqslant 0} u_i = 0 + 1 + 2 + \ldots = +\infty. \qquad (I, 1; 35)$$

Но

$$\sum_{i \in I_\alpha} u_i = \alpha - \alpha = 0 = \sigma_\alpha \qquad (I, 1; 36)$$

и, значит,

$$\sum_{\alpha \in A} \sigma_\alpha = \sum 0 = 0. \qquad (I, 1; 37)$$

Каждый из рядов $\sum_{i \in I_\alpha} u_i$, таким образом, суммируем и имеет сумму 0, ряд $\sum_{\alpha \in A} \sigma_\alpha = \sum 0 = 0$ также суммируем, тогда как ряд $\sum_{i \in I} u_i$ не суммируем.

Предложение 10. (Частичное обращение предложения 9.) *Если все $u_i \geqslant 0$ и если условиться обозначать $+\infty$ сумму расходящегося ряда с неотрицательными членами, то всегда имеет место равенство*

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{\alpha \in A} \Big(\sum_{i \in I_\alpha} u_i \Big); \tag{I, 1; 38}$$

значение обеих частей равенства либо конечно, либо равно $+\infty$.

Это нечто вроде обращения предложения 9: если $u_i \geqslant 0$, если ряд $\sum_{i \in I_\alpha} u_i$ суммируем к сумме σ_α и если $\sum_{\alpha \in A} \sigma_\alpha$ суммируем, то ряд $\sum_{i \in I} u_i$ суммируем. В самом деле, положим $\sum_{\alpha \in A} \sigma_\alpha = \sigma$. Всякая конечная сумма $\sum_{\alpha \in C} \sigma_\alpha$ мажорируется числом σ.

Пусть теперь J — произвольное конечное подмножество I, C — множество (конечное) тех элементов α множества A, для которых $I_\alpha \cap J \neq \varnothing$.

В силу последней части предложения 5 имеем

$$\sum_{i \in \bigcup\limits_{\alpha \in C} I_\alpha} u_i = \sum_{\alpha \in C} \sigma_\alpha, \tag{I, 1; 39}$$

поскольку C конечно.

Но

$$S_J \leqslant \sum_{i \in \bigcup\limits_{\alpha \in C} I_\alpha} u_i \quad \text{и} \quad \sum_{\alpha \in C} \sigma_\alpha \leqslant \sigma,$$

откуда $S_J \leqslant \sigma$.

Таким образом, все суммы S_J мажорируются числом σ и ряд $\sum_{i \in I} u_i$ суммируем в силу предложения 3.

Предложение 11. (Следствие предложения 9.) *Если ряды*

$$\sum_{i \in I} u_i \quad \text{и} \quad \sum_{j \in J} v_j$$

суммируемы к суммам U и V, то ряд

$$\sum_{(i,\, j) \in I \times J} u_i v_j \tag{I, 1; 40}$$

— произведение двух предыдущих рядов — является суммируемым и притом к сумме

$$W = UV. \tag{I, 1; 41}$$

В самом деле, суммирование пачками дает

$$\sum_{(i,\,j)\in I\times J} u_i v_j = \sum_{i\in I}\Bigl(\sum_{j\in J} u_i v_j\Bigr) = \sum_{i\in I}\Bigl(u_i \sum_{j\in J} v_j\Bigr) = \sum_{i\in I}(u_i V) = V\sum_{i\in I} u_i = VU;$$

эта выкладка показывает, что *если суммировать пачками можно*, то ряд $\sum\limits_{(i,\,j)\in I\times J} u_i v_j$ наверняка имеет суммой UV. Но для того, чтобы иметь право суммировать пачками, следовало бы сначала знать, что ряд $\sum\limits_{(i,\,j)\in I\times J} u_i v_j$ суммируем.

Тем не менее если все u_i и $v_j \geqslant 0$, то мы всегда имеем право суммировать пачками (предложение 10); поэтому теорема доказана для этого случая.

Если же u_i и v_j произвольны, то обратимся к $|u_i|$ и $|v_j|$; известно, что ряды $\sum\limits_{i\in I}|u_i|$ и $\sum\limits_{j\in J}|v_j|$ суммируемы в силу предложения 6 и, значит, ряд $\sum\limits_{(i,\,j)\in I\times J}|u_i|\cdot|v_j|$ суммируем к сумме $\Bigl(\sum\limits_{i\in I}|u_i|\Bigr)\cdot\Bigl(\sum\limits_{j\in J}|v_j|\Bigr)$; следовательно, ряд $\sum\limits_{(i,\,j)\in I\times J} u_i v_j$ также суммируем.

Замечание. Если как I, так и J является множеством целых чисел $\geqslant 0$, то ряд-произведение представляет собой двойной ряд, множеством индексов в котором является множество пар (m, n) целых чисел $\geqslant 0$. Этот ряд-произведение часто суммируют пачками, полагая

$$W_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j, \qquad UV = \sum_{n=0}^{\infty} W_n. \tag{I, 1; 42}$$

Примеры числовых суммируемых рядов. Ряд

$$\sum_{\substack{(m,\,n)\\ m \text{ целое} \geqslant 1\\ n \text{ целое} \geqslant 1}} \left(\frac{1}{m+n}\right)^{\alpha} \tag{I, 1; 43}$$

суммируем при $\alpha > 2$ и не суммируем при $\alpha \leqslant 2$.

Более общий случай: ряд

$$\sum_{\substack{(p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_n)\\ p_i \text{ целые} \geqslant 1}} \left(\frac{1}{p_1+p_2+\ldots+p_n}\right)^{\alpha} \tag{I, 1; 44}$$

суммируем при $\alpha > n$ и не суммируем при $\alpha \leqslant n$. В самом деле, разложение степени $(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)^n$ показывает, что она $\geqslant p_1 p_2 \ldots p_n n! \geqslant$ $\geqslant p_1 p_2 \ldots p_n$. Поэтому

$$\left(\frac{1}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}\right)^{\alpha} = \left[\left(\frac{1}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}\right)^n\right]^{\frac{\alpha}{n}} < \left(\frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_n}\right)^{\frac{\alpha}{n}}. \quad (\text{I}, 1; 45)$$

Таким образом, данный ряд мажорируется выражением

$$\sum \left(\frac{1}{p_1}\right)^{\frac{\alpha}{n}} \sum \left(\frac{1}{p_2}\right)^{\frac{\alpha}{n}} \ldots \sum \left(\frac{1}{p_n}\right)^{\frac{\alpha}{n}}. \quad (\text{I}, 1; 46)$$

Если $\alpha > n$, то $\frac{\alpha}{n} > 1$, и этот ряд является суммируемым.

Предположим, что, наоборот, $\alpha \leqslant n$. Будем суммировать **пачками (ряд** имеет неотрицательные члены). Рассматриваемый ряд равен

$$\sum_{p_1=1}^{\infty} \left[\sum_{(p_2, \ldots, p_n)} \left(\frac{1}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}\right)^{\alpha}\right], \quad (\text{I}, 1; 47)$$

где

$$\sum_{(p_2, \ldots, p_n)} \left(\frac{1}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}\right)^{\alpha} \geqslant \sum_{\substack{1 \leqslant p_2 \leqslant p_1 \\ \cdots\cdots \\ 1 \leqslant p_n \leqslant p_1}} \left(\frac{1}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}\right)^{\alpha} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{1}{n p_1}\right)^{\alpha} \cdot p_1^{n-1}. \quad (\text{I}, 1; 48)$$

Таким образом, исследуемый ряд имеет сумму $\geqslant \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \sum_{p_1=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p_1}\right)^{\alpha+1-n}$.

Поскольку $\alpha \leqslant n$, $\alpha + 1 - n \leqslant 1$, этот ряд расходится.

Замечание. Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(p_1 + p_2 + \ldots + p_n) \leqslant \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2} \leqslant$$

$$\leqslant p_1 + p_2 + \ldots + p_n. \quad (\text{I}, 1; 49)$$

Поэтому ряд $\sum\limits_{(p_1, p_2, \ldots, p_n)} \left(\frac{1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2}}\right)^{\alpha}$ имеет **ту же природу; он** суммируем при $\alpha > n$ и не суммируем при $\alpha \leqslant n$.

2. Условно сходящиеся ряды. Мы предположим здесь, что множество индексов I является множеством N целых чисел $\geqslant 0$; таким образом, существует естественный порядок членов ряда.

Теорема Абеля

Наиболее важным критерием сходимости для случая, когда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ не является абсолютно сходящимся, является *теорема о знакопеременных рядах*[1]). Ее обобщает *теорема Абеля*:

Пусть $u_n = a_n b_n$, где $a_n \geqslant 0$, убывают и стремятся к нулю, когда $n \to \infty$, а b_n — комплексные числа, такие, что величины

$$|\sigma_{m,n}| = |b_m + b_{m+1} + \ldots + b_n|$$

мажорируются некоторой константой $\sigma \geqslant 0$. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ сходится, а его остаток не превосходит по модулю числа σ, умноженного на первый член остатка.

В самом деле, подсчитаем:

$$\begin{aligned}S_{0,n} &= a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n = \\ &= a_0\sigma_{0,0} + a_1(\sigma_{0,1} - \sigma_{0,0}) + \ldots + a_n(\sigma_{0,n} - \sigma_{0,n-1}) = \\ &= (a_0 - a_1)\sigma_{0,0} + (a_1 - a_2)\sigma_{0,1} + \ldots \\ &\qquad \ldots + (a_{n-1} - a_n)\sigma_{0,n-1} + a_n\sigma_{0,n}. \qquad (1, 1; 50)\end{aligned}$$

Член $a_n\sigma_{0,n}$, имеющий вид, отличный от остальных, стремится к нулю при $n \to \infty$, поскольку $a_n \to 0$ и $|\sigma_{0,n}| \leqslant \sigma$. Остается показать, что сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1})\sigma_{0,k} \qquad (1, 1; 51)$$

имеет предел при $n \to \infty$. Это сводится к тому, чтобы показать, что ряд с общим членом

$$v_k = (a_k - a_{k+1})\sigma_{0,k} \qquad (1, 1; 52)$$

сходится. Но этот ряд сходится абсолютно, поскольку

$$|v_k| < (a_k - a_{k+1})\sigma, \qquad (1, 1; 53)$$

---

[1]) *Признак Лейбница* в русской литературе. — *Прим. перев.*

откуда

$$\sum_{k=0}^{n-1} |v_k| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |v_k| \leqslant$$

$$\leqslant (a_0 - a_1)\sigma + \ldots + (a_{n-1} - a_n)\sigma + \ldots = a_0\sigma, \qquad (I, 1; 54)$$

что и доказывает сходимость данного ряда.

По уже доказанной сходимости имеем оценку

$$|S_{0,\,n}| \leqslant a_n\sigma + a_0\sigma, \qquad (I, 1; 55)$$

значит

$$|S_0| \leqslant a_0\sigma, \text{ где } S_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n. \qquad (I, 1; 56)$$

Та же самая выкладка, начатая с члена a_{m+1}, с учетом того, что

$$R_m = \lim_{n \to \infty} S_{m+1,\,n}, \qquad (I, 1; 57)$$

дает

$$|R_m| \leqslant a_{m+1}\sigma. \qquad (I, 1; 58)$$

Ч. и т. д.

Примеры.

1) *Знакопеременный ряд*

$$b_n = (-1)^n, \ \sigma = 1, \qquad (I, 1; 59)$$

откуда

$$|R_m| \leqslant a_{m+1}. \qquad (I, 1; 60)$$

В этом случае, кроме того, известно, что остаток имеет тот же самый знак, что и его первый член.

2) *Тригонометрический ряд*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{ni\theta}. \qquad (I, 1; 61)$$

Говорят, что этот ряд сходится, если каждый из двух рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{ni\theta} \quad \text{и} \quad \sum_{n=-\infty}^{0} a_n e^{ni\theta} \qquad (I, 1; 62)$$

по отдельности сходится. Здесь

$$b_n = e^{ni\theta}, \ \sigma_{m,\,n} = e^{mi\theta} + e^{(m+1)\,i\theta} + \ldots + e^{ni\theta}. \qquad (I, 1; 63)$$

С одной стороны, если $e^{i\theta} \neq 1$, имеем

$$\sigma_{m,n} = \frac{e^{(n+1)\,i\theta} - e^{mi\theta}}{e^{i\theta} - 1},$$

$$|\sigma_{m,n}| \leqslant \frac{2}{|e^{i\theta} - 1|}. \qquad (I, 1; 64)$$

С другой стороны, если $e^{i\theta} = 1$, то

$$\sigma_{m,n} = n - m + 1 \qquad (I, 1; 65)$$

— неограниченная величина.

Заключение. Если $a_n \geqslant 0$, убывают и стремятся к нулю при $n \to \infty$, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{ni\theta} \qquad (I, 1; 66)$$

сходится при $\theta \neq 2k\pi$ и его остаток не превосходит по модулю величины $a_{m+1} \dfrac{2}{|e^{i\theta} - 1|}$.

Разумеется, отделяя вещественную и мнимую части, мы получим аналогичное свойство для рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\theta. \qquad (I, 1; 67)$$

Но для последнего сходимость имеет место даже при $\theta = 2k\pi$, поскольку все члены этого ряда равны при этом нулю.

§ 2. Дополнительные сведения об интегрировании

Однократный интеграл

1. Интеграл Лебега[1]) Интеграл Лебега, обобщающий интеграл Римана, является функционалом, который всякой вещественной или комплексной функции переменного x, принадлежащей к определенному семейству, называемому семейством суммируемых функций, сопоставляет ее интеграл — некоторое

[1]) Интеграл Лебега необходим для теории гильбертова пространства; эта теория в свою очередь необходима для волновой механики, теории дифференциальных уравнений с частными производными и для теории интегральных уравнений.

вещественное или комплексное число, обозначаемое символами

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx, \text{ или } \int_R f(x)\,dx, \text{ или } \int f(x)\,dx, \text{ или } \int f. \qquad (I, 2; 1)$$

Ввиду большой трудности этой теории мы не приводим необходимого и достаточного условия для того, чтобы некоторая функция была суммируемой; мы не даем также метода вычисления ее интеграла. Мы приводим без доказательства некоторое число важных результатов.

Множество меры нуль на прямой R

— Характеристической функцией некоторого подмножества E прямой R называется функция φ_E, равная 1 в каждой точке $x \in E$ и равная 0 в каждой точке $x \notin E$.

Определение 1. *Пусть E — открытое множество; мерой E называется верхняя грань интегралов от неотрицательных непрерывных функций, обращающихся в нуль вне ограниченного интервала и мажорируемых характеристической функцией φ_E.*

Например, если E — интервал $]a, b[$, то его мера равна $b - a$.

Определение 2. *Говорят, что множество E на прямой имеет меру нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество меры $\leqslant \varepsilon$, которое содержит множество E.*

Пример. Точка имеет меру нуль.

Свойства множеств меры нуль

Предложение 12. *Всякое множество, содержащееся в множестве меры нуль, имеет меру нуль.*

Предложение 13. *Всякое множество E, которое является объединением конечного или счетного числа множеств меры нуль имеет меру нуль.*

Следствие. Поскольку точка имеет меру нуль, всякое счетное множество точек имеет меру нуль. Например, множество всех рациональных чисел, которое является счетным, имеет меру нуль.

Замечания

1) Предложение 13 не сохраняется для объединения несчетного числа множеств E_i.

Например, $E = R$ есть объединение множеств E_i, сводящихся каждое к одной точке, таким образом $\operatorname{mes} E_i = 0$, в то время как мера E равна бесконечности и не равна нулю. Впрочем, этим доказано, что множество E несчетно!

2) Существуют несчетные множества, которые все-таки имеют меру нуль.

Пусть P — некоторое свойство точек x прямой R. Говорят, что P выполняется почти всюду или почти во всех точках x прямой R, если множество точек x, которые не обладают свойством P, имеет меру нуль. Так, например, почти все числа иррациональны.

Из предложения 13 вытекает

Предложение 14. *Пусть (P_i) — конечное или счетное семейство свойств точек x прямой R, и пусть каждое из них выполняется почти всюду. Назовем P свойство, которое состоит в том, что точка x обладает одновременно всеми свойствами (P_i). Тогда P выполняется почти всюду.*

Измеримые функции

Определение 3. *Говорят, что функция f измерима, если она является почти всюду пределом некоторой последовательности непрерывных функций.*

Это означает, что существует некоторая последовательность непрерывных функций $f_m(x)$, такая, что $f(x) = \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x)$, для каждой x, кроме некоторого множества точек x меры нуль.

В частности, всякая функция, непрерывная всюду, кроме точек x некоторого множества меры нуль, является измеримой.

Свойства измеримых функций

Предложение 15. *Всякая непрерывная функция от конечного числа измеримых функций измерима. В частности, если f и g измеримы, то функции $f+g$, fg, $\sup(f, g)$ $\inf(f, g)$, $|f|$ и f/g, если $g \neq 0$ всюду, являются измеримыми.*

Всякая функция f, которая является обычным пределом последовательности измеримых функций f_n, является измеримой. Неизмеримые функции устроены столь неправильно, что ни одна из них явно не известна; можно только теоретически доказать их существование, используя одну аксиому, называемую аксиомой выбора, которая не позволяет построить практически ни одной такой функции. Это говорит о том, что все функции, которые могут встретиться физику, наверняка измеримы. *Вот почему в дальнейшем мы будем предполагать, не оговаривая этого каждый раз, что все рассматриваемые функции измеримы.*

√ ***Суммируемые функции***

Предложение 16. *Для того чтобы функция была суммируемой, необходимо, чтобы она была измеримой. Она должна, кроме того, не быть „слишком большой".*

Свойства суммируемых функций

Предложение 17. *Для того чтобы f была суммируемой, необходимо и достаточно, чтобы $|f|$ был симмируемым. Если g · суммируема и $\geqslant 0$ и если $|f| \leqslant g$, то f суммируема.*

Предложение 18. *Если f и g суммируемы и λ — постоянная, то $f+g$ и λf суммируемы, причем*

$$\int (f+g) = \int f + \int g, \quad \int \lambda f = \lambda \int f. \tag{I, 2; 2}$$

Таким образом, множество суммируемых функций является *векторным пространством, которое обозначается* $\mathscr{L}^1$. Интеграл на этом пространстве $\mathscr{L}^1$ является *линейной формой*, или *линейным функционалом*.

Предложение 19. *Если $f \geqslant 0$, то $\int f \geqslant 0$; если $|f| \leqslant g$, то*

$$\left|\int f\right| \leqslant \int |f| \leqslant \int g. \tag{I, 2; 3}$$

Говорят, что интеграл является неотрицательным функционалом.

Замечание. Если $f \geqslant 0$ измерима, но не суммируема, то полагают

$$\int f = +\infty.$$

Предложение 20. *Ограниченная функция f, равная нулю вне конечного интервала (a, b), суммируема. Если, кроме того, f интегрируема в смысле Римана на (a, b), то ее интеграл Лебега совпадает с ее интегралом Римана по интервалу (a, b). Если на интервале (a, b) выполняются оценки*

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad [\text{соответственно } |f(x)| \leqslant M], \tag{I, 2; 4}$$

то

$$m(b-a) \leqslant \int f(x)\,dx \leqslant M(b-a) \tag{I, 2; 5}$$

$$\left[\text{соответственно } \left|\int f(x)\,dx\right| \leqslant M(b-a)\right]. \tag{I, 2; 6}$$

Предложение 21. *Пусть f — вещественная или комплексная функция, A и M — два произвольных положительных числа. Обозначим $f_{A,M}(x)$ функцию, равную $f(x)$, если $-A \leqslant x \leqslant A$ и $|f(x)| \leqslant M$, и равную нулю во всех остальных точках x.*

Для того чтобы f была суммируемой, необходимо и достаточно, чтобы интегралы $\int |f_{A,M}|$ были ограничены независимо от A и M.

Для того чтобы функция f, имеющая только конечное число точек разрыва, была суммируемой, необходимо и достаточно, чтобы ее интеграл, в смысле теории „несобственных интегралов" Римана, был абсолютно сходящимся: в этом случае ее интеграл Лебега совпадает с ее „несобственным интегралом".

Предложение 22. *Если f является функцией, равной почти всюду нулю, то она суммируема и ее интеграл равен нулю. Если две функции f и g равны почти всюду и если f суммируема, то g суммируема и $\int f = \int g$.*

Это позволяет сказать, является ли функция f суммируемой, и вычислить ее интеграл, даже если она не определена всюду на R или если она принимает в некоторых точках значения $\pm\infty$.

В самом деле, обозначим через f_1 функцию, равную f во всякой точке x, где $f(x)$ определена и $\neq \pm\infty$, и равную какому-нибудь конечному значению в остальных точках. При условии, что f определена почти всюду и почти всюду $\neq \pm\infty$, суммируемость функции f_1 и значение ее интеграла не зависят от произвола, который имеется в ее определении; функцию f называют суммируемой, если f_1 суммируема, при этом полагают $\int f = \int f_1$.

Предложение 23. (Обращение предложения 22.) *Если $f \geqslant 0$ и если $\int f = 0$, то f почти всюду равна нулю. Если $f \geqslant g$ и если $\int f = \int g$, то f и g равны почти всюду.*

Говорят, что две функции f и g, определенные почти всюду и почти всюду $\neq \infty$, эквивалентны, если они почти всюду равны.

Классом функций является множество функций (определенных почти всюду и всюду конечных), которые почти всюду равны некоторой функции, определенной и конечной.

Пространством L^1 называют векторное пространство классов суммируемых функций. Это — фактор-пространство векторного пространства $\mathcal{L}^1$ суммируемых функций по подпространству функций, почти всюду равных нулю. Поскольку интеграл суммируемой функции зависит только от ее класса, интеграл является формой, или функционалом, на пространстве L^1.

Мера множеств на R

Если E — интервал $]a, b[$, то его мера $b - a$ является также интегралом от его характеристической функции. В общем случае говорят, что множество E измеримо, если измерима его характеристическая функция φ_E. Мерой множества E, обозначаемой $\operatorname{mes} E$, называют интеграл $\int \varphi_E$.

Если φ_E суммируема, то E называют суммируемым. Если φ_E не суммируема, то полагают $\operatorname{mes} E = +\infty$.

Предложение 24. *Мера (конечная или бесконечная) объединения E конечного или счетного числа множеств E_i не превосходит суммы их мер:* $\operatorname{mes} E \leqslant \sum_i \operatorname{mes} E_i$ *(ряд с членами* $\geqslant 0$).

Имеет место равенство $\operatorname{mes} E = \sum_i \operatorname{mes} E_i$, *если множества E_i попарно не имеют общих точек.*

Интеграл по множеству

Пусть E — некоторое подмножество R, f — вещественная или комплексная функция, определенная на E. Говорят, что f суммируема на E, если функция f_0, равная $f(x)$ для $x \in E$ и равная 0 для $x \notin E$, суммируема на R; интегралом от f по множеству E называют число

$$\int_E f(x)\,dx = \int_R f_0(x)\,dx. \tag{I, 2; 7}$$

Вот почему нет необходимости строить специальную теорию интеграла на конечном интервале (a, b) перед теорией интеграла на R, ведь первая является очевидным частным случаем второй.

Известно, что если $a \leqslant b$, то обычно под $\int_a^b f(x)\,dx$ понимают интеграл от f по интервалу (a, b), а если $b \leqslant a$, то под $\int_a^b f(x)\,dx$ понимают число $-\int_b^a f(x)\,dx$, противоположное по знаку интегралу от f по интервалу (a, b).

Если f определена на R, то функция f_0 есть не что иное, как $f\varphi_E$, причем

$$\int_E f(x)\,dx = \int_R f(x)\,\varphi_E(x)\,dx. \tag{I, 2; 8}$$

Имеют место следующие оценки: если $m \leqslant f(x) \leqslant M$ [соответственно $|f(x)| \leqslant M$] при $x \in E$, то

$$m \operatorname{mes} E \leqslant \int_E f(x)\,dx \leqslant M \operatorname{mes} E$$

$\left[\text{соответственно } \left|\int_E f(x)\,dx\right| \leqslant M \operatorname{mes} E\right]$ (оценки, которые представляют интерес, только если $\operatorname{mes} E$ конечна).

Если E имеет меру нуль, то $\int_E f(x)\,dx = 0$, какова бы ни была f.

Замена переменных

Пусть (a, b) — конечный интервал, $x = \xi(t)$ — непрерывная функция с непрерывной производной $\xi'(t)$ от переменного t на интервале $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Предположим, что $\xi(\alpha) = a$ и $\xi(\beta) = b$. Тогда если $f(x)$ — непрерывная функция на (a, b), то, как известно, интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ можно записать в виде

$$\int_\alpha f(\xi(t))\,\xi'(t)\,dt\ [1].$$

Предположим, что $\xi(t)$ *монотонна*. Тогда, если обозначить через T интервал (α, β) при $\alpha \leqslant \beta$, или (β, α) при $\beta \leqslant \alpha$, а через X — интервал (a, b) или (b, a) при $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$ соответственно, то, каковы бы ни были взаимные положения точек a и b и α и β, будем иметь

$$\int_X f(x)\,dx = \int_T f(\xi(t))\,|\xi'(t)|\,dt. \qquad (I, 2; 9)$$

(Предположим, например, что $\alpha \leqslant \beta$. Если ξ — возрастающая, то a b и $\int_X = \int_a^b$, $\int_T = \int_\alpha^\beta$; кроме того, $\xi'(t) \geqslant 0$ и, значит, $|\xi'(t)| = \xi'(t)$. Если же, напротив, ξ — убывающая, то $b \leqslant a$, $\int_X = -\int_a^b$, $\int_T = \int_\alpha^\beta$ и $|\xi'(t)| = -\xi'(t)$.)

Теперь можно высказать обобщение.

Предложение 25. *Пусть T — некоторое множество на R, $x = \xi(t)$ — непрерывная функция с непрерывной производной, определенная на открытом множестве, содержащем T, и пусть X — множество, пробегаемое точкой x, когда t пробегает T.*

Предположим, кроме того, что отображение ξ взаимно однозначно на T.

---

[1]) Автор предполагает, что $a \leqslant \xi(t) \leqslant b$ при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. — *Прим. перев.*

Тогда для того, чтобы $f(x)$ была суммируема на X, необходимо и достаточно, чтобы $f(\xi(t))|\xi'(t)|$ была суммируема на T, при этом

$$\int_X f(x)\,dx = \int_T f(\xi(t))|\xi'(t)|\,dt. \qquad (I, 2; 10)$$

Кратный интеграл Кратный интеграл — это некоторый функционал, который всякой суммируемой функции f от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ставит в соответствие некоторое число, ее интеграл, обозначаемое символами

$$\int\int_{R^n} \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n, \qquad (I, 2; 11)$$

или

$$\int\int_{R^n} \ldots \int f, \quad \text{или} \quad \int\int \ldots \int f.$$

Обозначив через x точку с координатами $x_1, \ldots, x_n$ в пространстве n измерений R^n и положив $dx = dx_1\,dx_2 \ldots dx_n$ (dx часто называют элементом объема), мы можем рассматривать f как функцию, определенную на R^n, и обозначать ее интеграл символом

$$\int\int \ldots \int f(x)\,dx. \qquad (I, 2; 12)$$

Кратный интеграл обладает свойствами, аналогичными свойствам однократного интеграла. Мера множеств в R^n есть, очевидно, объемная мера. Так, мерой параллелепипеда (который мы будем называть брусом), определенного неравенствами $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, является число

$$\prod_{\nu=1}^{n} (b_\nu - a_\nu). \qquad (I, 2; 13)$$

Если $f(x)$ на этом брусе заключена между m и M, то ее интеграл по брусу заключен между

$$m\prod_{\nu=1}^{n} (b_\nu - a_\nu) \quad \text{и} \quad M\prod_{\nu=1}^{n} (b_\nu - a_\nu). \qquad (I, 2; 14)$$

Кривая, поверхность или подмногообразие размерности $k < n - 1$ имеют меру нуль, если они достаточно регулярны (например, если в каждой своей точке они обладают линейным касательным подмногообразием, меняющимся непрерывно); это дает простые примеры несчетных множеств меры нуль.

Замена переменных в кратных интегралах

Правило, данное для одного переменного, обобщается следующим образом.

Предложение 26. *Пусть T — подмножество в R^n; $x = \xi(t)$ — отображение T в R^n, заданное n функциями $x_i = \xi_i(t_1, \ldots, t_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть функции ξ_i определены, непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка на некотором открытом множестве из R^n, содержащем T. Предположим, кроме того, что отображение ξ взаимнооднозначно на T. Обозначим через $J(t) = J(t_1, \ldots, t_n)$ якобиан отображения ξ, т. е. определитель, составленный из $\frac{\partial \xi_i}{\partial t_j}$. Тогда для того, чтобы $f(x)$ была суммируемой на множестве X, пробегаемом точкой x, когда t пробегает T, необходимо и достаточно, чтобы $f(\xi(t))|J(t)|$ была суммируема на T, при этом*

$$\int\int\underset{X}{\cdots}\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n =$$

$$= \int\int\underset{T}{\cdots}\int f(\xi_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, \xi_n(t_1, \ldots, t_n)) \times$$

$$\times |J(t_1, \ldots, t_n)|\,dt_1 \ldots dt_n. \qquad (I, 2; 15)$$

$$J(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \xi_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial t_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \xi_2}{\partial t_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \xi_n}{\partial t_1} & \frac{\partial \xi_n}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial t_n} \end{vmatrix} \qquad (I, 2; 16)$$

Пример. На плоскости R^2 положим $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Пусть $X = R^2$. За T примем множество значений $0 < r$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, дополненное элементом $r = 0$, $\theta = 0$, так, чтобы отображение $(r, \theta) \to (x, y)$ было взаимно однозначным на T. Здесь

$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r. \qquad (I, 2; 17)$$

Следовательно, для того чтобы $f(x, y)$ была суммируема на R^2, необходимо и достаточно, чтобы $f(r\cos\theta, r\sin\theta)r$ была суммируема на T, при этом

$$\int\int_{R^2} f(x, y)\,dx\,dy = \int\int_{T} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta. \qquad (I, 2; 18)$$

Интеграл $\iint\limits_T$ можно заменить интегралом по множеству $0 \leqslant r$, $0 \leqslant \theta \leqslant \leqslant 2\pi$, которое в плоскости с декартовыми координатами r, θ представляет собой полуполосу ширины 2π, параллельную оси r. Это сводится к добавлению к множеству T множества $r > 0$, $\theta = 2\pi$, и множества $r = 0$, $0 < \theta \leqslant \leqslant 2\pi$, которые представляют собой полупрямую и отрезок прямой на плоскости (r, θ) и, следовательно, являются множествами меры нуль.

Вычисление двойного интеграла последовательными однократными интегрированиями. Теорема Фубини — Лебега

Пусть $f(x, y)$ — непрерывная функция двух переменных x и y на брусе $a \leqslant x \leqslant a'$, $b \leqslant y \leqslant b'$. При любом фиксированном x функция $y \to f(x, y)$ является непрерывной функцией одного переменного y, следовательно, ее можно проинтегрировать по интервалу (b, b'). Полученный интеграл $I(x)$ зависит от x и является, стало быть, функцией x, определенной в интервале (a, a'). Тогда имеем

Предложение 27. *Если f непрерывна при $a \leqslant x \leqslant a'$, $b \leqslant y \leqslant b'$, то интеграл $I(x) = \int\limits_b^{b'} f(x, y)\,dy$ будет непрерывной функцией от x в интервале $a \leqslant x \leqslant a'$. Его интеграл $\int\limits_a^{a'} I(x)\,dx$ есть не что иное, как*

$$\iint\limits_{\substack{a \leqslant x \leqslant a' \\ b \leqslant y \leqslant b'}} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Таким образом, имеем

$$\iint\limits_{\substack{a \leqslant x \leqslant a' \\ b \leqslant y \leqslant b'}} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^{a'} dx \int\limits_b^{b'} f(x, y)\,dy = \int\limits_b^{b'} dy \int\limits_a^{a'} f(x, y)\,dx. \tag{I, 2; 19}$$

Мы собираемся обобщить это предложение на случай, когда f не обязательно непрерывна и когда брус заменен самой R^2.

Предложение 28. *Если $f(x, y)$ суммируема на R^2, то функция $y \to f(x, y)$ при фиксированном x является суммируемой по y всюду, кроме некоторых исключительных значений x, которые образуют множество меры нуль.*

Величина $I(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy$ *является, стало быть, функцией от* x, *определенной почти всюду. Она суммируема и ее интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} I(x)\,dx$ *есть не что иное, как* $\iint\limits_{R^2} f(x, y)\,dx\,dy$. Таким образом, имеем

$$\iint\limits_{R^2} f(x, y)\,dx\,dy=\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy=\int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx. \quad (I, 2; 20)$$

Замечания. 1) Если $f(x, y)$ не является суммируемой, то может случиться, что одно из двух выражений

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx \quad (I, 2; 21)$$

имеет смысл, а другое не имеет смысла; может даже случиться, что каждое из них имеет смысл, но что эти значения различны.

Пример.

$$\begin{aligned} \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy &= \frac{\pi}{4}, \\ \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx &= -\frac{\pi}{4}. \end{aligned} \quad (I, 2; 22)$$

2) Нельзя надеяться, что $f(x, y)$ будет суммируемой по y при всех значениях x. В самом деле, функцию $f(x, y)$ можно видоизменить на вертикали $x=a$ произвольным образом, не нарушив ее суммируемости, поскольку прямая $x=a$ является множеством меры нуль на плоскости R^2.

Это позволяет взять в качестве функции $y \to f(a, y)$ произвольную функцию от y, следовательно, нет никакой причины, заставляющей ее быть суммируемой по y. Однако множество значений x, при которых подобное обстоятельство может возникнуть, имеет меру нуль, функция $I(x)$ определена почти всюду, а только это и имеет значение. См. пример, формула (I, 2; 61).

3) Теорему Фубини следует сравнить с теоремой о суммировании пачками в теории суммируемых рядов. Но известно, что эта теорема допускает обращение в случае рядов с членами $\geqslant 0$. То же самое имеет место и здесь:

Предложение 29. *Пусть* $f(x, y) \geqslant 0$ (*f всегда предполагается измеримой*). *Пусть функция* $y \to f(x, y)$ *при фиксированном* x *суммируема по* y *всюду, кроме некоторых значений* x, *образующих множество меры нуль, и пусть функция* $I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy$, *определенная таким образом почти всюду, суммируема по* x. *Тогда* $f(x, y)$ *суммируема и*

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(x)\,dx = \iint_{R^2} f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (I, 2; 23)$$

Иначе говоря, в случае функции $f(x, y) \geqslant 0$ три всегда определенных (конечных или равных $+\infty$) интеграла

$$\iint_{R^2} f(x, y)\,dx\,dy, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx \qquad (I, 2; 24)$$

всегда принимают одно и то же значение.

Вывод. *Если функция* f *такова, что один из интегралов* (I, 2; 24), *составленный для* $|f|$ *или для некоторой мажоранты* $g \geqslant |f|$, *конечен, то все три интеграла* (I, 2; 24), *составленные для* f, *имеют смысл и равны.*

В самом деле, $|f|$ суммируем и значит суммируема также f.

Теорему Фубини, естественно, можно применять к интегралам типа $\iint_E f(x, y)\,dx\,dy$, где E — некоторое множество в R^2, при условии, что f суммируема на E или что $f \geqslant 0$.

Здесь нет никакой новой теоремы, поскольку это сводится к вычислению интеграла $\iint_{R^2} f_0(x, y)\,dx\,dy$, где f_0 — функция, определенная на E и продолженная нулем при $x \notin E$. Пусть $E(x)$ — „сечение E“ вертикалью с абсциссой x, т. е. множество точек y, таких, что $(x, y) \in E$. Тогда имеем

$$\iint_E f(x, y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{E(x)} f(x, y)\,dy. \qquad (I, 2; 25)$$

Пример. Первообразная порядка n и остаточный член в формуле Тейлора.

Для непрерывной функции f одного переменного вычислим интеграл

$$\int_0^x d\xi \int_0^\xi f(t)\,dt. \qquad (I, 2; 26)$$

Это — вторая первообразная для f, обращающаяся в нуль при $x=0$ вместе со своей первой производной.

Предположим сначала, что $x>0$. Интеграл записывается в виде $\int\int_E f(t)\,dt\,d\xi$, где E — множество точек (ξ, t), удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant \xi \leqslant x$, $0 \leqslant t \leqslant \xi$. Этот интеграл можно, стало быть, записать также в виде

$$\int_0^x dt \int_t^x f(t)\,d\xi = \int_0^x (x-t) f(t)\,dt. \qquad (I, 2; 27)$$

Он выражается, таким образом, через однократный интеграл. Легко видеть, что это верно также и при $x<0$.

В общем случае n-я первообразная непрерывной функции f одного переменного, обращающаяся в нуль при $x=0$ вместе со своими производными порядка $\leqslant n-1$, записывается в виде

$$\int_0^x d\xi_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \ldots \int_0^{\xi_{n-1}} f(\xi_n)\,d\xi_n. \qquad (I, 2; 28)$$

Легко показать по индукции, что этот интеграл выражается через однократный интеграл

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt. \qquad (I, 2; 29)$$

В самом деле, это верно при $n=1$. Предположим, что это верно при $n=m-1$, и докажем это утверждение для $n=m$. Интеграл (I, 2; 28) записывается тогда в виде

$$\int_0^x d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \frac{(\xi_1-t)^{m-2}}{(m-2)!} f(t)\,dt. \qquad (I, 2; 30)$$

Обращая порядок интегрирования, как в формулах (I, 2; 26—27), получаем

$$\int_0^x f(t)\,dt \int_t^x \frac{(\xi_1-t)^{m-2}}{(m-2)!}\,d\xi = \int_0^x \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} f(t)\,dt. \qquad (I, 2; 31)$$

Ч. и т. д.

Пусть теперь f — непрерывная функция одного переменного, имеющая непрерывные производные до порядка $n+1$ включительно. Интеграл

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \qquad (I, 2; 32)$$

является функцией x первообразной $n+1$-го порядка для $f^{(n+1)}$, обращающейся в нуль в начале координат вместе со своими производными порядка $\leqslant n$. Тогда функция f, которая также является $n+1$-й первообразной для $f^{(n+1)}$, получается прибавлением к этому интегралу полинома степени $\leqslant n$, у которого производные порядка $\leqslant n$ при $x=0$ совпадают с производными f. В силу формулы Тейлора для полиномов этот полином имеет вид

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^{\nu}. \qquad (I, 2; 33)$$

Таким образом, имеем

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^{\nu} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt. \qquad (I, 2; 34)$$

Это — формула Тейлора для функций с остаточным членом, записанным в интегральной форме. Если $n+1$-я производная функции f в интервале $(0, x)$ мажорируется по модулю постоянной M, то остаточный член не превосходит величины

$$M\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt\right| = M\left|\left[\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^x\right| = M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad (I, 2; 35)$$

это — классическая оценка остаточного члена в формуле Тейлора.

Обобщение на кратные интегралы произвольного порядка Тройной интеграл $\iiint_{R^3} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$, если f суммируема или если $f \geqslant 0$, можно вычислить посредством трех однократных последовательных интегрирований:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\,dz. \qquad (I, 2; 36)$$

При фиксированных x и y интеграл по z имеет смысл всюду, кроме некоторых исключительных значений (x, y), образующих множество меры нуль в пространстве R^2. Таким образом, интеграл $I(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\,dz$ определен почти всюду. Он суммируем по (x, y), и обычный метод состоит в том, чтобы вычислить его двойной интеграл $\iint_{R^2} I(x, y)\,dx\,dy$ двумя последовательными интегрированиями. Но тройной интеграл можно записать также в виде

$$\iint_{R^2} dx\,dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y; z)\,dz. \tag{I, 2; 37}$$

Можно было бы также произвести сначала двойное интегрирование, а затем однократное:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \iint_{R^2} f(x, y, z)\,dy\,dz \quad \text{и т. п. \dots} \tag{I, 2; 38}$$

Предложение 30. *Если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ является произведением $f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$ функций, зависящих только от одного переменного, ни одна из которых не обращается почти всюду в нуль, то для того, чтобы $f(x_1, \dots, x_n)$ была суммируемой, необходимо и достаточно, чтобы каждая из функций $f_i(x_i)$ была суммируемой, при этом интеграл от f равен произведению интегралов от f_i:*

$$\iint \dots \int_{R^n} f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n)\,dx_1\,dx_2 \dots dx_n = \prod_{\nu=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_\nu(x_\nu)\,dx_\nu \right).$$

Это очевидно, если f — суммируема и если применить теорему Фубини. Однако нет необходимости с самого начала предполагать суммируемость f. Если каждая из функций $f_\nu(x_\nu)$ суммируема, то суммируема каждая из функций $|f_\nu(x_\nu)|$, но поскольку эти функции $\geqslant 0$, мы имеем право заключить отсюда, что $|f|$ суммируем и, стало быть, суммируема f [1]).

[1]) Ср. с предложением 11. — *Прим. перев.*

Использование интегралов по сферам

Пусть надо вычислить интеграл $\int\int\limits_{R^2} f(x, y)\,dx\,dy$, где f предполагается суммируемой или $\geqslant 0$. Заменой переменных этот интеграл всегда можно переписать в виде

$$\int\int\limits_{\substack{0\leqslant r\\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta. \tag{I, 2; 39}$$

Этот двойной интеграл можно вычислить двумя последовательными однократными интегрированиями:

$$\int\limits_0^\infty dr \int\limits_0^{2\pi} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,d\theta. \tag{I, 2; 40}$$

Заметим, что $r\,d\theta = ds$ — элемент длины окружности радиуса r.

Эту формулу можно распространить на пространство n измерений, допустив существование интегралов по сферам с центром O по $(n-1$-мерной) площадке dS и допустив, что такой интеграл обладает свойствами, аналогичными свойствам однократных или многократных интегралов. Таким образом:

Предложение 31. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая функция n переменных, суммируемая или $\geqslant 0$. Обозначим через $I(r)$ интеграл $\int\int\ldots\int f(x)\,dS$ функции f по сфере с центром O радиуса r по поверхностной мере dS. $I(r)$ будет определен для тех значений r, для которых f суммируема по dS по сфере радиуса r [$I(r)$ определен, стало быть, для почти всех значений r, если f суммируема]; интеграл $I(r)$ будет также определен (конечен или равен $+\infty$) для всех значений r, если $f\geqslant 0$. При этом имеет место формула*

$$\int\int\ldots\int\limits_{R^n} f(x)\,dx = \int\limits_0^\infty I(r)\,dr = \int\limits_0^\infty dr \int\int\ldots\int\limits_{\sum x_i^2 = r^2} f\,dS \tag{I, 2; 41}$$

(все эти величины конечны, если f суммируема по R^n, и конечны и $\geqslant 0$ или равны $+\infty$, если $f\geqslant 0$).

Частный случай. Предположим, что f является функцией переменного $r=\sqrt{\sum x_i^2}$; $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(r)$. Тогда интеграл $\int\int\ldots\int f\,dS$

равен $S(r)f(r)$, где через $S(r)$ обозначена площадь сферы радиуса r. Из соображений однородности

$$S(r)=S_n r^{n-1}, \tag{I, 2; 42}$$

где S_n — площадь сферы единичного радиуса в R^n.

Итак,

Предложение 32. *Пусть f — функция, определенная на R^n и зависящая только от $\sqrt{\sum x_i^2}=r$. Для того чтобы f была суммируемой на R^n, необходимо и достаточно, чтобы $f(r)r^{n-1}$ была суммируемой на $(0, \infty)$. При этом*

$$\int\int\ldots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=S_n\int_0^\infty f(r)\,r^{n-1}\,dr. \tag{I, 2; 43}$$

Замечания. 1) В противоположность теореме Фубини нет необходимости предполагать с самого начала, что f суммируема на R^n. В самом деле, если $f(r)r^{n-1}$ суммируема на $(0, +\infty)$, то $|f(r)|r^{n-1}$ также суммируема на $(0, +\infty)$ и, поскольку речь идет о функции $\geqslant 0$, отсюда вытекает, что $|f|$, а стало быть, и f суммируемы на R^n.

2) Эта формула сводит кратные интегралы, в которых фигурируют только функции от r, к однократным интегралам, при условии, что площадь S_n известна. Но $S_2=2\pi$, $S_3=4\pi$. Легко проверить, что для того, чтобы формула была всегда справедливой, следует положить $S_1=2$. В дальнейшем мы вычислим S_n для всех значений n [гл. VIII, формула (VIII, 1; 24)].

Отметим сразу же, что объем шара с центром O радиуса R равен

$$B_n(R)=\int\int\limits_{\sqrt{\sum x_i^2}\leqslant R}\ldots\int 1\,dx_1\ldots dx_n=S_n\int_0^R r^{n-1}\,dr, \tag{I, 2; 44}$$

$$B_n(R)=S_n\frac{R^n}{n}. \tag{I, 2; 45}$$

Пример:

$$B_2(R)=2\pi\cdot\frac{R^2}{2}=\pi R^2,\qquad B_3(R)=4\pi\cdot\frac{R^3}{3}=\frac{4}{3}\pi R^3 \tag{I, 2; 46}$$

и также

$$B_1(R)=2\cdot R=2R.$$

Предложение 33. *Интеграл*

$$\int\int\limits_{r\geqslant 1}\cdots\int \frac{dx_1\ldots dx_n}{r^\alpha} \qquad (I, 2; 47)$$

конечен при $\alpha > n$ *и бесконечен при* $\alpha \leqslant n$; *интеграл*

$$\int\int\limits_{r\leqslant 1}\cdots\int \frac{dx_1\ldots dx_n}{r^\alpha} \qquad (I, 2; 48)$$

конечен при $\alpha < n$ *и бесконечен при* $\alpha \geqslant n$.

В самом деле, эти интегралы записываются в виде

$$S_n\int\limits_1^\infty r^{n-1-\alpha}\,dr; \qquad S_n\int\limits_0^1 r^{n-1-\alpha}\,dr. \qquad (I, 2; 49)$$

Пример. *Ньютонов потенциал однородного электрического заряда плотности* μ, *распределенного по шару радиуса* R.

Поле в точке, находящейся на расстоянии r от заряда e, равно $\frac{e}{r^2}$ и направлено по радиусу-вектору. Положительным мы считаем направление самого радиуса-вектора (т. е. поле, отталкивающее при $e \geqslant 0$). Таким образом, потенциал, создаваемый зарядом e на расстоянии r, равен $\frac{e}{r}+C$; постоянную C определяют из требования, что потенциал на бесконечности равен нулю, отсюда $C=0$.

Тогда потенциал в точке a, создаваемый зарядом произвольной плотности $\mu(x)$, является суммой потенциалов, создаваемых элементарными зарядами $\mu(x)\,dx$; таким образом, по определению,

$$U(a)=\int\int\int\frac{\mu(x)\,dx}{|x-a|}. \qquad (I, 2; 50)$$

Применим эту формулу к случаю, когда плотность равна постоянной μ в шаре радиуса R, и равна 0 вне этого шара, а точка a находится в центре шара, который мы примем за начало координат:

$$U(0)=\int\int\limits_{|x|\leqslant R}\int\frac{\mu}{|x|}\,dx=\int\int\limits_{r\leqslant R}\int\frac{\mu}{r}\,dx=$$

$$=S_3\mu\int\limits_0^R\frac{r^2}{r}\,dr=4\pi\cdot\frac{R^2}{2}\mu=2\pi R^2\mu. \qquad (I, 2; 51)$$

Получим эту формулу другим способом, используя закон Ньютона для притяжения сферических слоев.

В точке, внешней по отношению к шару, находящейся на расстоянии r от центра, поле такое же, как если бы весь заряд был сконцентрирован в центре шара:

$$H(r) = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\mu}{r^2}, \qquad r \geqslant R; \tag{I, 2; 52}$$

оно направлено по радиусу-вектору и считается положительным в направлении радиуса-вектора. Отсюда выводится потенциал на расстоянии $r \geqslant R$ от O:

$$U(r) = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\mu}{r} + C_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\mu}{r}, \tag{I, 2; 53}$$

ибо $U(\infty)$ должно равняться нулю.

В точке, находящейся на расстоянии $r \leqslant R$ от O, играют роль только заряды, находящиеся на расстоянии $\leqslant r$ от O, и поле — такое же, как если бы все заряды были сконцентрированы в центре шара:

$$H(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \mu \frac{1}{r^2} = \frac{4}{3}\pi r \mu; \tag{I, 2; 54}$$

положительным считается направление радиуса-вектора.

Соответствующий потенциал на расстоянии $r \leqslant R$ от O равен

$$U(r) = -\frac{2}{3}\pi r^2 \mu + C_2, \qquad r \leqslant R. \tag{I, 2; 55}$$

Мы определим константу C_2, записав, что $U(R)$ равно уже найденной величине [см. формулу (I, 2; 53)]:

$$-\frac{2}{3}\pi R^2 \mu + C_2 = \frac{4}{3}\pi R^2 \mu, \tag{I, 2; 56}$$

откуда

$$C_2 = 2\pi R^2 \mu, \tag{I, 2; 57}$$

что дает для формулы (I, 2; 55)

$$U(r) = -\frac{2}{3}\pi r^2 \mu + 2\pi R^2 \mu, \qquad r \leqslant R. \tag{I, 2; 58}$$

Теперь достаточно положить $r = 0$, чтобы вновь получить

$$U(0) = 2\pi R^2 \mu \tag{I, 2; 59}$$

— формулу, совпадающую с (I, 2; 51).

Различные замечания

1) Напомним, что $\vec{H} = -\operatorname{grad} U$ и, значит,

$$H(r) = -\frac{dU}{dr}. \tag{I, 2; 60}$$

Для проверки (чтобы избежать ошибок в знаке!) используйте то, что поле всегда направлено в сторону убывания потенциала.

2) Интеграл (I, 2; 50) суммируем, коль скоро $\mu(x)$ ограничена и равна нулю вне ограниченного множества, ибо этот интеграл мажорируется с точностью до множителя интегралом $\displaystyle\iiint\limits_{r \leqslant r_0} \frac{dx}{r}$, тем самым мы имеем (предложение 33) случай $\alpha = 1 < 3$.

Предположим, что интеграл (I, 2; 51) вычисляется по теореме Фубини вычисление, рекомендуемое с целью проверки). Обозначив через ξ, η, ζ координаты $x \in R^3$, имеем

$$U(0) = \mu \iint\limits_{\xi^2+\eta^2<R^2} d\xi\, d\eta \int\limits_{-\sqrt{R^2-\xi^2-\eta^2}}^{\sqrt{R^2-\xi^2-\eta^2}} \frac{d\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}. \qquad \text{(I, 2; 61)}$$

При фиксированных ξ и η интеграл по ζ наверняка суммируем, за исключением случая $(\xi, \eta) = (0, 0)$. В этом случае он сводится к интегралу

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{d\zeta}{|\zeta|} = +\infty. \qquad \text{(I, 2; 62)}$$

Мы обнаруживаем обстоятельство, отмеченное в связи с теоремой Фубини предложение 28, замечание 2). Здесь функция

$$I(\xi, \eta) = \int\limits_{-\sqrt{R^2-\xi^2-\eta^2}}^{\sqrt{R^2-\xi^2-\eta^2}} \frac{d\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}$$

определена всюду (при $\xi^2+\eta^2 < R^2$ она определяется этой формулой, при $\xi^2+\eta^2 \geqslant R^2$ ее следует положить равной 0), кроме точки $(\xi, \eta) = (0, 0)$.

3) Формула (I, 2; 60) справедлива только, если $H(r)$ является функцией, определенной и непрерывной при $r > 0$. Это имеет здесь место в силу формул (I, 2; 52) и (I, 2; 54). Это позволяет с самого начала утверждать, что $U(r)$ является непрерывной функцией от r, имеющей непрерывную первую производную. Именно этот факт оправдывает приравнивание при $r = R$ двух функций $U(r)$, найденных для $r \geqslant R$ и $r \leqslant R$.

Если $H(r)$ определена только для почти всех значений r и суммируема по r на любом конечном интервале, то формула (I, 2; 60) становится неточной и должна быть заменена формулой

$$U(r_1) - U(r_2) = -\int\limits_{r_2}^{r_1} H(r)\, dr \qquad \text{(I, 2; 63)}$$

и $U(r)$ снова оказывается непрерывной функцией r (см. ниже предложение 34).

В общем случае можно показать, что если $\mu(x)$ ограничена и равна нулю вне некоторого ограниченного множества, то $U(a)$, определяемая по формуле (I, 2; 50), является непрерывной функцией от a с непрерывными частными производными первого порядка [см. стр. 63].

Неопределенный интеграл как функция своего верхнего предела

Предложение 34. (Лебег.) *Пусть $f(x)$ — функция вещественного переменного x, определенная почти всюду и суммируемая в конечном или бесконечном интервале (a, b). Тогда неопределенный интеграл $F(x)=\int_a^x f(\xi)\,d\xi$ является непрерывной функцией при $x\in(a, b)$, имеющей для почти всех значений x производную, равную $f(x)$.*

Замечание. Нельзя надеяться, что $F(x)$ имеет *всюду* производную, равную $f(x)$, ибо если изменить $f(x)$ на множества меры нуль, то это не изменит интеграла F. В точках x (образующих множество меры нуль), где не выполняется равенство $F'(x)=f(x)$, функция F может иметь производную, отличную от $f(x)$, или же вовсе не иметь никакой производной.

2. Несобственные условно сходящиеся интегралы Лебега. Пусть (a, b) — некоторый интервал, конечный или бесконечный, вещественной прямой, и пусть f — функция, суммируемая на $(a, b-\varepsilon)$ при любом $\varepsilon>0$. Независимо от того, будет ли она суммируемой на (a, b), может оказаться, что интеграл $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ имеет предел при $\varepsilon\to 0$; тогда говорят, что интеграл от f по (a, b) сходится и обозначают его символом $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ $\Big($или символом $\int_a^b f(x)\,dx$, как и интеграл суммируемой функции$\Big)$.

Если $\int_a^{\to b} |f(x)|\,dx$ сходится, то интеграл от f называется абсолютно сходящимся на (a, b). В этом случае f является суммируемой на (a, b), и наоборот; в противном случае интеграл от f называется условно сходящимся.

То же самое определение дается для интегралов $\int\limits_{\to a}^{b} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{\to a}^{\to b} f(x)dx$ (последний имеет смысл, если для некоторого c между a и b каждый из интегралов $\int\limits_{\to a}^{c}$ и $\int\limits_{c}^{\to b}$ имеет смысл).

Теорема Абеля *Пусть при $x > a$ функция $f(x)$ равна произведению $\alpha(x)\beta(x)$, где $\alpha(x)$ — положительная убывающая функция, стремящаяся к 0 при $x \to \infty$, $\beta(x)$ — непрерывна, и пусть величины*

$$\sigma_{c,\,d} = \int\limits_{c}^{d} \beta(x)\,dx \tag{I, 2; 64}$$

не превосходят по модулю фиксированной постоянной σ. Тогда интеграл $\int\limits_{a}^{\to +\infty} f(x)dx$ сходится, а его „остаток“ $\int\limits_{A}^{\to +\infty} f(x)dx$ не превосходит по модулю величины

$$\sigma\alpha(A). \tag{I, 2; 65}$$

Мы ограничимся доказательством теоремы для случая, когда $\alpha(x)$ непрерывна и дифференцируема и, стало быть, имеет производную $\alpha' \leqslant 0$.

Функция $\sigma_{a,x}$ является первообразной для $\beta(x)$ и можно произвести интегрирование по частям

$$\int\limits_{a}^{B} f(x)\,dx = [\sigma_{a,x}\alpha(x)]_{x=a}^{x=B} - \int\limits_{a}^{B} \sigma_{a,x}\alpha'(x)\,dx = \sigma_{a,\,B}\,\alpha(B) - \int\limits_{a}^{B} \sigma_{a,x}\alpha'(x)\,dx. \tag{I, 2; 66}$$

При $B \to \infty$ величина $\sigma_{a,\,B}$ ограничена константой σ, а $\alpha(B) \to 0$, поэтому первый член в правой части стремится к нулю. Остается показать, что второй, интегральный, член имеет предел при $B \to \infty$, т. е. что интеграл $\int\limits_{a}^{\to +\infty} \sigma_{a,x}\alpha'(x)\,dx$ сходится. Но ведь этот интеграл сходится даже *абсолютно*, ибо $|\sigma_{a,x}||\alpha'(x)| \leqslant \sigma|\alpha'(x)|$ и

$$\int\limits_{a}^{B} |\alpha'(x)|\,dx = -\int\limits_{a}^{B} \alpha'(x)\,dx = \alpha(a) - \alpha(B) \to \alpha(a) \tag{I, 2; 67}$$

при $B \to \infty$. Таким образом, интеграл $\int\limits_a^{\to +\infty} f(x)\,dx$ наверняка имеет смысл и, кроме того,

$$\left|\int\limits_a^{\to+\infty} f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^{\to+\infty} |\sigma_{a,x}| \cdot |\alpha'(x)|\,dx \leqslant \sigma\alpha(a). \qquad (I, 2; 68)$$

Та же самая оценка, примененная к $\int\limits_A^{\to+\infty} f(x)\,dx$, дает $\sigma\alpha(A)$.

Ч. и т. д.

Примеры. *Тригонометрические интегралы.* Интеграл

$$\int\limits_a^{\to+\infty} \alpha(x)\,e^{i\lambda x}\,dx \qquad (I, 2; 69)$$

имеет смысл при вещественном $\lambda \neq 0$, если функция $\alpha(x) \geqslant 0$, убывает и стремится к 0 при $x \to \infty$.

В самом деле, здесь $\beta(x) = e^{i\lambda x}$, $\sigma_{c,d} = \frac{e^{i\lambda d} - e^{i\lambda c}}{i\lambda}$, $\sigma \leqslant \frac{2}{|\lambda|}$. При тех же самых предположениях об $\alpha(x)$ сходятся и интегралы

$$\int\limits_a^{\to+\infty} \alpha(x)\cos\lambda x\,dx, \quad \int\limits_a^{\to+\infty} \alpha(x)\sin\lambda x\,dx. \qquad (I, 2; 70)$$

Кроме того, второй из них имеет смысл и при $\lambda = 0$, потому что он при этом просто равен нулю. Если $\alpha(x)$ не суммируема, то эти интегралы не сходятся абсолютно.

Рассмотрим, например, интегралы

$$I = \int\limits_0^{\to+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{\sqrt{x}}\,dx, \quad C = \int\limits_0^{\to+\infty} \frac{\cos\lambda x}{\sqrt{x}}\,dx, \quad S = \int\limits_0^{\to+\infty} \frac{\sin\lambda x}{\sqrt{x}}\,dx. \qquad (I, 2; 71)$$

Они сходятся при $\lambda \neq 0$. Произведем замену переменного $x = t^2$ (она дозволена на конечном интервале, т. е. для $\int\limits_0^B$, откуда, переходя к пределу,

получаем, что она законна и для $\left(\int_0^{\to+\infty}\right)$. Отсюда мы заключаем, что интегралы

$$\frac{I}{2}=\int_0^{\to+\infty} e^{i\lambda t^2}\,dt,\quad \frac{C}{2}=\int_0^{\to+\infty}\cos\lambda t^2\,dt,\quad \frac{S}{2}=\int_0^{\to+\infty}\sin\lambda t^2\,dt \qquad (I, 2; 72)$$

являются условно сходящимися (несмотря на то, что $|e^{i\lambda t^2}|=1$).

Эти интегралы суть интегралы Френеля; можно показать, что

$$\int_0^{\to+\infty}\cos t^2\,dt=\int_0^{\to+\infty}\sin t^2\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Главное значение по Коши

Пусть f — функция, определенная при $a\leqslant x\leqslant b$, суммируемая на $(a,\ c-\varepsilon)$ и на $(c+\varepsilon,\ b)$ при любом $\varepsilon>0$, но не обязательно суммируемая на $(a,\ b)$. Обычно считают, что интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ имеет смысл, если каждый из интегралов $\int_a^{\to c} f(x)\,dx$ и $\int_{\to c}^b f(x)\,dx$ имеет смысл. Это сводится к утверждению, что сумма $\int_a^{c-\eta}+\int_{c+\varepsilon}^b$ имеет предел, когда η и ε стремятся к 0 независимо друг от друга.

Может оказаться, что такой предел не существует, но что существует предел, когда $\eta=\varepsilon$, $\varepsilon\to 0$. В этом случае говорят, что интеграл от f сходится в смысле главного значения по Коши, и записывают

$$\mathrm{vp}\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon}+\int_{c+\varepsilon}^b\right)^{1)}.$$

Предложение 35. *Для того чтобы существовал интеграл* $\mathrm{vp}\int_a^b f(x)\,dx$, *необходимо и достаточно, чтобы функция* f *равнялась в окрестности точки* $x=c$ *сумме антисимметрической функции*

---

[1]) Символ vp от французского valeur principale — главное значение. — *Прим. перев.*

f_1 $(f_1(c+u) = -f_1(c-u))$ *и такой симметрической функции* f_2 $(f_2(c+u) = f_2(c-u))$, *для которой интеграл* $\int\limits_{\to c} f_2(x)dx$ *существует.*

При $c=0$ вместо „симметрическая" и „антисимметрическая" употребляют термины „четная" и „нечетная".

Заменой переменного $x = c+u$ всегда можно прийти к этому случаю, поэтому мы предположим, что $c=0$. Всякую функцию f в окрестности точки $x=0$ можно однозначно представить в виде суммы четной и нечетной функций:

$$f(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} + \frac{f(x)+f(-x)}{2} = f_1(x) + f_2(x). \qquad \text{(I, 2; 73)}$$

Поскольку f_1 нечетна, ее интегралы по симметричным интервалам сокращаются; поэтому если α выбрано так, что $a \leqslant -\alpha < 0 < \alpha \leqslant b$, то

$$\int\limits_{-\alpha}^{-\varepsilon} f_1(x)\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^{\alpha} f_1(x)\,dx = 0. \qquad \text{(I, 2; 74)}$$

Таким образом, сходимость в смысле vp на (a, b), или, что то же самое, на $(-\alpha, \alpha)$, для f совпадает со сходимостью для f_2. Кроме того, ввиду четности f_2

$$\int\limits_{-\alpha}^{-\varepsilon} f_2(x)\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^{\alpha} f_2(x)\,dx = 2\int\limits_{\varepsilon}^{\alpha} f_2(x)\,dx, \qquad \text{(I. 2; 75)}$$

так что интеграл от f в смысле vp существует тогда и только тогда, когда существует интеграл $\int\limits_{\to 0}^{\alpha} f_2(x)\,dx.$

Пример. Предположим, что f допускает в окрестности точки $x=c$ асимптотическое представление:

$$f(x) = \frac{c_{-1}}{x-c} + c_0 + c_1(x-c) + \ldots$$

Тогда интеграл от f существует в смысле vp, поскольку $\frac{1}{x-c}$ антисимметрична. Пусть (более общий случай) $f(x) = \frac{\varphi(x)}{x-c}$, где $\varphi(x)$ непрерывна в окрестности точки $x=c$ и дифференцируема в точке $x=c$. Тогда

vp-интеграл от f существует, ибо

$$f(x)=\frac{\varphi(c)}{x-c}+\frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c},$$

где первая функция антисимметрична, а вторая ограничена в окрестности $x=c$.

Точно так же существует понятие главного значения для интервала $(-\infty, +\infty)$. Если f суммируема во всяком конечном интервале, то $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ в смысле vp определяется как предел $\lim\limits_{B\to\infty}\int\limits_{-B}^{B} f(x)\,dx$. Для того чтобы подобное главное значение существовало, необходимо и достаточно, чтобы $f=f_1+f_2$, где f_1 нечетна, а f_2 четна и такова, что интеграл $\int\limits_{0}^{\to+\infty} f_2(x)\,dx$ существует.

Легко вычислить следующие интегралы:

$$\mathrm{vp}\int\limits_a^b \frac{dx}{x}=\lg\left|\frac{b}{a}\right|,\quad \text{при условии, что}\quad a\neq 0,\ b\neq 0. \qquad (\text{I}, 2; 76)$$

$$\mathrm{vp}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x}=0 \quad (\text{нечетная функция}). \qquad (\text{I}, 2; 77)$$

§ 3. Функции, представимые рядами и интегралами

1. Функции, представимые рядами. Пусть $\sum\limits_{i\in I} u_i(x)$ — некоторый ряд, суммируемый при всех значениях некоторого параметра x, пробегающего множество E ($u_i(x)$ — комплексное число при всех i и всех x). Тогда его сумма $f(x)$ будет комплекснозначной функцией от x. Как зависят свойства функции $f(x)$ (непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость) от свойств членов ряда $u_i(x)$?

Та же задача возникает, если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ есть ряд, у которого множество индексов представляет собой множество N целых чисел $\geqslant 0$.

Ряд предполагается сходящимся при $x\in E$.

Наконец, пусть $f_n(x)$ — *последовательность* комплекснозначных функций, и пусть при любом $x\in E$ последовательность $f_n(x)$ имеет предел при $n\to\infty$. Можно также изучать зависимость свойств этого предела $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ от свойств членов последовательности f_n.

Простая и равномерная сходимость

Последовательность $f_n(x)$ называется *просто сходящейся* к $f(x)$ при $n \to \infty$, если *для любого фиксированного* x числовая последовательность $f_n(x)$ сходится при $n \to \infty$ к числу $f(x)$. Это сводится к утверждению, что при фиксированном x и при заданном $\varepsilon > 0$ существует такое N, что при $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Это число N зависит от ε *и от* x; вот почему мы будем записывать его как $N(\varepsilon, x)$.

Последовательность $f_n(x)$ называется *равномерно сходящейся к* $f(x)$ при $x \in E$, если для любого данного $\varepsilon > 0$ существует целое число $N(\varepsilon)$, *независящее от* x и такое, что при $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$, каково бы ни было $x \in E$.

Введем понятие *расстояния* между двумя числовыми функциями f и g, определенными на множестве E:

$$d(f, g) = \sup_{x \in E} |f(x) - g(x)| \leqslant +\infty. \tag{I, 3; 1}$$

Отметим, что для любых трех функций f, g, h выполняется неравенство $d(f, g) \leqslant d(f, h) + d(h, g)$ (неравенство треугольника).

Последовательность f_n равномерно сходится к f при $n \to \infty$, если $d(f, f_n)$ стремится к 0 при $n \to \infty$; равномерная сходимость последовательности функций сводится таким образом к сходимости к нулю последовательности чисел $d(f, f_n)$.

Примеры. А. $f_n(x) = x^n$, $0 \leqslant x \leqslant 1$;

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq 1, \\ 1 & \text{при } x = 1; \end{cases} \tag{I, 3; 2}$$

$$|f(x) - f_n(x)| = \begin{cases} x^n & \text{при } x \neq 1, \\ 0 & \text{при } x = 1; \end{cases} \tag{I, 3; 3}$$

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad n \lg x \leqslant \lg \varepsilon, \tag{I, 3; 4}$$

откуда

$$n \geqslant \frac{\lg(1/\varepsilon)}{\lg(1/x)}, \quad \text{но} \quad \frac{\lg(1/\varepsilon)}{\lg(1/x)} \to \infty \quad \text{при} \quad x \to 1,$$

и, значит, сходимость не является равномерной при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Она неравномерна и при $0 \leqslant x < 1$ [но она равномерна при $0 \leqslant x \leqslant 1 - \delta$, $\delta > 0$, ибо в этом случае имеем $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant \dfrac{\lg(1/\varepsilon)}{\lg(1/(1-\delta))}$ (величина, не

зависящая от x)]. Впрочем, $d(f(x), f_n(x)) = 1$.

B.
$$f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2} \qquad \text{(I, 3; 5)}$$

— сдвиг фиксированной функции $\frac{1}{1+x^2}$ при сдвиге $x \to x+n$.

Последовательность $f_n(x)$ сходится к 0 при $n \to \infty$ равномерно, если x пробегает конечный интервал (a, b), ибо при достаточно большом n

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+(b-n)^2},$$

где правая часть стремится к 0 при $n \to \infty$; $f_n(x)$ стремится равномерно к 0 даже на любой полупрямой $(-\infty, b)$.

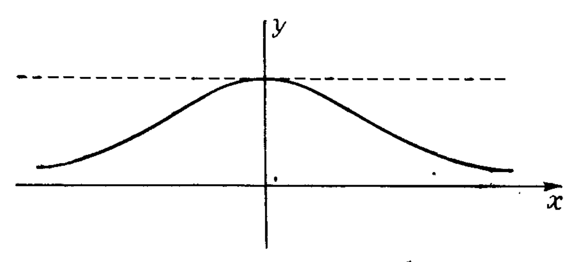


Рис. I, 1. Кривая $y = \frac{1}{1+x^2}$.

Но она не стремится равномерно к 0 на всей вещественной оси, ибо $d(f_n(x), 0) = 1$.

C. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно при $x \in E$, если частные суммы $S_n(x)$ сходятся равномерно к его сумме $S(x)$ при $n \to \infty$; или, иначе, если остаток $R_n(x)$ сходится равномерно к 0 при $n \to \infty$; или, еще иначе, если $d_n = d(R_n(x), 0) = \sup\limits_{x \in E} |R_n(x)| \to 0$ при $n \to \infty$.

D. Ряд $\sum\limits_{i \in I} u_i(x)$ равномерно суммируем при $x \in E$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное множество J значений индекса, зависящее от ε, но не зависящее от x, такое, что для любого, конечного или бесконечного, K, содержащего J, выполняется неравенство $|S_K(x) - S(x)| \leqslant \varepsilon$ при любом $x \in E$.

E. Пусть $f_\lambda(x)$ — функция от x, зависящая от параметра λ, который мы будем считать, например, вещественным. Говорят, что $f_\lambda(x)$ сходится равномерно к $f_{\lambda_0}(x)$ при $\lambda \to \lambda_0$ для $x \in E$, если $d(f_\lambda(x), f_{\lambda_0}(x))$ стремится к 0 при $\lambda \to \lambda_0$.

Предложение 36. (Критерий Коши.) *Для того чтобы последовательность $f_n(x)$ комплекснозначных функций, определенных на множестве E, равномерно сходилась к некоторому пределу при $n \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы числа $d_{m,n} = d(f_m(x), f_n(x))$ стремились к нулю, когда m и n стремятся к ∞. Для того чтобы ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ сходился равномерно, необходимо и достаточно, чтобы числа $d_{m,n} = d(S_m(x), S_n(x))$ стремились к нулю при m и $n \to \infty$ (и, стало быть, необходимо, чтобы общий член $u_n(x)$ стремился к 0 равномерно по $x \in E$ при $n \to \infty$). Для того чтобы ряд $\sum_{i \in I} u_i(x)$ был равномерно суммируем, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало конечное множество индексов J, зависящее от ε, но не зависящее от x, такое, что для любого множества индексов K, не имеющего общих элементов с J, при любом x выполняется неравенство $|S_K(x)| \leqslant \varepsilon$.*

Мы дадим доказательство только для последовательности $f_n(x)$. Случай ряда $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ сразу же выводится отсюда, если положить $f_n(x) = S_n(x)$; случай ряда $\sum_{i \in I} u_i(x)$ мы рекомендуем читателю в качестве упражнения.

1) Предположим, что последовательность f_n равномерно сходится к f. Для данного ε существует такое $N(\varepsilon)$, что при $n \geqslant N$ выполняется неравенство $d(f_n, f) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда при $m \geqslant N$ и $n \geqslant N$ будем иметь $d(f, f_m) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, $d(f, f_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, откуда $d(f_m, f_n) \leqslant d(f, f_m) + d(f, f_n) \leqslant \varepsilon$ и, значит, $d(f_m, f_n) \to 0$ при m и $n \to \infty$.

2) Предположим теперь, что $\lim\limits_{m,\, n \to \infty} d(f_m, f_n) = 0$. При данном $\varepsilon > 0$ существует такое $N(\varepsilon)$, что при $m \geqslant N$, $n \geqslant N$ и при любом $x \in E$ выполняется неравенство $|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$. Но при фиксированном x последовательность чисел $f_n(x)$ является последовательностью Коши, поскольку $f_m(x) - f_n(x) \to 0$ при $m, n \to \infty$. Поэтому, как известно, она сходится к некоторому пределу. Этот предел зависит от точки x, которая была фиксирована, и является, таким образом, некоторой функцией $f(x)$. Но из соотношения $\lim\limits_{m \to \infty} f_m(x) = f(x)$ при фиксированном x и из неравенства $|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$ при $m \geqslant N(\varepsilon)$, $n \geqslant N(\varepsilon)$ вытекает неравенство $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant N(\varepsilon)$ и фиксированном x; но поскольку этот результат не зависит от x, имеем $d(f, f_n) \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant N(\varepsilon)$ и, значит, f_n сходится к f равномерно по $x \in E$ при $n \to \infty$. Ч. и т. д.

Практические критерии равномерной сходимости

Определение 4. *Если* $|u_i(x)| \leqslant v_i$, *числа* $v_i \geqslant 0$ *не зависят от* x *и если ряд* $\sum\limits_{i \in I} v_i$ *суммируем, то ряд* $\sum\limits_{i \in I} u_i(x)$ *(который, согласно предложению 6, будет суммируемым при любом* x*) называется нормально суммируемым.*

Предложение 37. *Всякий нормально суммируемый ряд равномерно суммируем.*

В самом деле, пусть J — конечное множество индексов, такое, что если K — множество индексов, не имеющее общих элементов с J, то выполняется неравенство $\sum\limits_{i \in K} v_i \leqslant \varepsilon$. Тогда a fortiori

$$\left|\sum_{i \in K} u_i(x)\right| \leqslant \sum_{i \in K} |u_i(x)| \leqslant \varepsilon,$$

и, значит, ряд $\sum\limits_{i \in I} u_i(x)$, согласно критерию Коши (предложение 36), равномерно суммируем.

Примеры. A. Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — некоторый степенной ряд. Предположим, что предел $\lim\limits_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = k$ конечен. Тогда ряд будет нормально суммируемым при $|z| \leqslant \frac{1}{k} - \delta$, $\delta > 0$ — произвольно. В самом деле, в этом случае имеем

$$|a_n z^n| \leqslant |a_n| \left(\frac{1}{k} - \delta\right)^n,$$

а числовой ряд с этими неотрицательными членами суммируем, ибо признак Даламбера дает

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \left(\frac{1}{k} - \delta\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} k\left(\frac{1}{k} - \delta\right) < 1. \qquad \text{(I, 3; 6)}$$

B. Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — некоторый степенной ряд. Предположим, что предел $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = k$ конечен. Тогда ряд будет нормально суммируемым при $|z| \leqslant \frac{1}{k} - \delta$, $\delta > 0$ — произвольно. Ибо в этом случае $|a_n z^n| \leqslant |a_n| \left(\frac{1}{k} - \delta\right)^n$,

а числовой ряд с этими неотрицательными членами $u_n \geqslant 0$ суммируем, согласно признаку Коши, ибо

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{|a_n|}\left(\frac{1}{k} - \delta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} k\left(\frac{1}{k} - \delta\right) < 1. \qquad (I, 3; 7)$$

C. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ суммируем при $\operatorname{Re}\alpha > 1$[1]). Этот ряд нормально суммируем на множестве комплексных чисел α, таких, что $\operatorname{Re}\alpha \geqslant 1 + \delta$, каково бы ни было $\delta > 0$. В самом деле, в этом случае выполняется оценка $\left|\frac{1}{n^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{n^{1+\delta}}$ — общий член числового суммируемого ряда с неотрицательными членами. Напротив, рассматриваемый ряд не сходится равномерно при $\alpha > 1$, ибо

$$d(S_{2n}(\alpha), S_n(\alpha)) = \sup_{\alpha>1}\left[\frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right] \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{\alpha>1} \frac{n}{(2n)^\alpha} = \sup_{\alpha>1} \frac{1}{2^\alpha} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}} = \frac{1}{2} \qquad (I, 3; 8)$$

— величина, не стремящаяся к 0 при $n \to \infty$.

D. Тригонометрический ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{ni\theta}$. Если ряд $\sum |a_n|$ суммируем, то, поскольку $|e^{ni\theta}| = 1$, данный ряд нормально суммируем при всех вещественных θ.

То же самое относится к рядам

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\theta.$$

Предложение 38. (Критерий Абеля.) *Пусть* $u_n(x) = a_n(x)\, b_n(x)$. *Предположим, что при любом x последовательность $a_n(x)$ убывает, $\geqslant 0$ и стремится к 0 при $n \to \infty$ равномерно по $x \in E$. Положим*

$$\sigma_{m,n}(x) = b_m(x) + b_{m+1}(x) + \ldots + b_n(x) \qquad (I, 3; 9)$$

и допустим, что существует постоянная σ, не зависящая от m, n и x, такая, что $|\sigma_{m,n}(x)| \leqslant \sigma$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x)$ сходится равномерно.

---

[1]) $\operatorname{Re}\alpha$ — вещественная часть α.

В самом деле, этот ряд сходится для любого значения x и, как известно, $|R_n(x)| \leqslant a_{n+1}(x)\sigma \leqslant a_{n+1}\sigma$, где $a_{n+1} = \sup_{x\in E} a_{n+1}(x)$; значит, $d(R_n(x), 0) \leqslant \leqslant a_{n+1}\sigma$. Предложение доказано, так как последовательность a_n стремится к 0.

Замечание. Из предположения $a_n(x) \leqslant a_n$ и $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ еще не вытекает, что последовательность $a_n(x)$ является при каждом x убывающей. Это убывание следует тщательно проверять.

Примеры. А. Пусть ряд имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n(x)$, причем $a_n(x) \geqslant 0$, $a_n(x)$ убывает при каждом x и $a_n(x) \leqslant a_n$, где $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Тогда рассматриваемый ряд равномерно сходится.

Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ равномерно сходится при вещественных $\alpha \geqslant \delta > 0$, ибо $\frac{1}{n^\alpha}$ убывает при фиксированном α и $\frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^\delta}$, где $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\delta} = 0$.

Напротив, этот ряд не сходится равномерно при $\alpha > 0$, ибо общий член $\frac{1}{n^\alpha}$ не стремится равномерно к 0 при $n \to \infty$. $\left[d\left(\frac{1}{n^\alpha}, 0\right) = \sup_{\alpha > 0}\frac{1}{n^\alpha} = 1.\right]$

В. *Тригонометрический ряд* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{ni\theta}$. Предположим, что при $n \to \infty$ последовательность a_n убывает, $a_n \geqslant 0$ и $a_n \to 0$ и что при $n \to -\infty$ последовательность ведет себя аналогично. Тогда, как известно, для $b_n = e^{ni\theta}$ имеем $|\sigma_{m,n}(\theta)| \leqslant \frac{2}{|e^{i\theta} - 1|}$.

Рассматриваемый ряд сходится равномерно при $|\theta - 2k\pi| \geqslant \delta > 0$, ибо в этом случае можно положить $\sigma = \frac{2}{|e^{i\delta} - 1|}$.

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta$ ведет себя аналогично.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\theta$ сходится для всех значений θ, даже для $\theta = 2k\pi$, ибо при этом все его члены равны нулю. Тем не менее он сходится *равномерно* только при $|\theta - 2k\pi| \geqslant \delta > 0$.

Непрерывность предела последовательности и суммы ряда

Предложение 39. *Если последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ при $n \to \infty$ равномерно, когда x пробегает некоторое множество E в эвклидовом пространстве R^m, и если все члены $f_n(x)$ этой последовательности непрерывны в некоторой точке x_0 множества E, то $f(x)$ непрерывна в точке x_0.*

В самом деле, напишем

$$f(x) - f(x_0) = [f(x) - f_n(x)] + [f_n(x) - f_n(x_0)] + \\ + [f_n(x_0) - f(x_0)], \quad (I, 3; 10)$$

откуда

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + \\ + |f_n(x_0) - f(x_0)|. \quad (I, 3; 11)$$

При данном $\varepsilon > 0$ выберем достаточно большое n, так, чтобы $|f(y) - f_n(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ для всех y из E. Тогда первый и третий члены правой части неравенства (I, 3; 11) не превосходят каждый $\frac{\varepsilon}{3}$, каково бы ни было x.

Выбрав, таким образом, n, воспользуемся тем, что функция f_n непрерывна и, значит, существует такое $\eta > 0$, что при $|x - x_0| \leqslant \eta$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f_n(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Тогда при $|x - x_0| \leqslant \eta$ будем иметь

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Ч. и т. д.

Если последовательность f сходится просто, но неравномерно, то функция f может оказаться разрывной, даже если все функции f_n непрерывны. Так, в примере A на стр. 51 $f_n(x) = x^n$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, а предел $f(x)$ равен 0 при $x \neq 1$ и 1 при $x = 1$ и, таким образом, разрывен в точке $x_0 = 1$.

Теорема остается справедливой, если заменить равномерно сходящуюся последовательность непрерывных функций равномерно сходящимся или равномерно суммируемым рядом непрерывных функций.

Напротив, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n (1 - x)$ суммируем при $0 \leqslant x \leqslant 1$ (при $x < 1$ — как геометрическая прогрессия, а при $x = 1$ — поскольку все его члены равны нулю), но не равномерно. Его сумма равна $\frac{1}{1-x} \cdot (1 - x) = 1$ при $x < 1$ и равна 0 при $x = 1$; она разрывна в точке $x = 1$.

Интегрируемость предела последовательности и суммы ряда

Предложение 40. *Пусть последовательность $f_n(x)$ ограниченных функций сходится при $n \to \infty$ к функции $f(x)$ равномерно при $x \in E$; E — подмножество конечной меры эвклидова пространства R^m. Тогда последовательность интегралов $\int\int_F \ldots \int f_n(x)\,dx$ сходится при $n \to \infty$ к интегралу $\int\int_F \ldots \int f(x)\,dx$, причем сходимость равномерна по всем $F \subset E$.*

В самом деле[1]), справедлива оценка

$$\left| \int\int_F \ldots \int f(x)\,dx - \int\int_F \ldots \int f_n(x)\,dx \right| \leqslant \operatorname{mes} E \cdot d(f, f_n).$$

Но при данном $\varepsilon > 0$ существует такое N, что $d(f, f_n) \leqslant \varepsilon / \operatorname{mes} E$ при $n \geqslant N$; тогда, при $n \geqslant N$,

$$\left| \int\int_F \ldots \int f(x)\,dx - \int\int_F \ldots \int f_n(x)\,dx \right| \leqslant \varepsilon \qquad (I, 3; 12)$$

каково бы ни было $F \subset E$.

Эта теорема, естественно, сохраняется для равномерно сходящихся и равномерно суммируемых рядов:

$$\int\int_F \ldots \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int\int_F \ldots \int u_n(x)\,dx \qquad (I, 3; 13)$$

(интегрирование под знаком $\sum$ или изменение порядка символов $\int$ и $\sum$).

Предложение 40 можно обобщить.

Предложение 41. (Теорема Лебега. Принимается без доказательства.) *Пусть последовательность функций $f_n(x)$, определенных в R^m, сходится просто к $f(x)$ при $n \to \infty$, и пусть $f_n(x)$ мажорируются по модулю одной и той же суммируемой функцией $g \geqslant 0$.* ($|f_n(x)| \leqslant g(x)$, $g(x) \geqslant 0$, $\int\int_{R^m} \ldots \int g(x)\,dx < +\infty$). *Тогда функция $f(x)$ суммируема*

[1]) Легко видеть, что f также ограничена.

и последовательность интегралов

$$\int\int\limits_{R^m}\dots\int f_n(x)\,dx$$

сходится к интегралу

$$\int\int\limits_{R^m}\dots\int f(x)\,dx$$

при $n\to\infty$.

Вернемся к примеру A на стр. 51. Хотя здесь нет равномерной сходимости, интегралы $\int\limits_0^1 x^n\,dx=\frac{1}{n+1}$ стремятся при $n\to\infty$ к интегралу $0=\int\limits_0^1 f(x)\,dx$. Предложение 41 применимо, поскольку $|f_n(x)|\leqslant 1$.

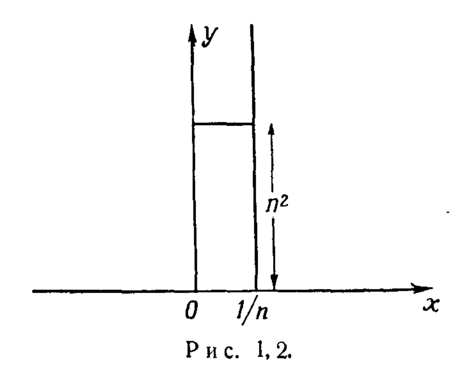


Рис. I, 2.

Рассмотрим, напротив, следующий пример (см. рис. I, 2):

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad x\leqslant 0\quad \text{и}\quad x\geqslant\frac{1}{n},\\ n^2 & \text{при}\quad 0<x<\frac{1}{n}.\end{cases}\qquad (I,3;14)$$

Последовательность $f_n(x)$ сходится (неравномерно) к 0 при любом x, когда $n\to\infty$. Однако интеграл $\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx=n^2\cdot\frac{1}{n}=n$ стремится к $+\infty$ вместе с n. Предложение 41 не применимо, поскольку функции $f_n(x)$ не мажорируются суммируемой функцией $g(x)\geqslant 0$, не зависящей от n.

Замечание. Достаточно предполагать, что $f_n(x)$ при $n \to \infty$ стремятся к $f(x)$ только для почти всех значений x (причем все время $|f_n(x)| \leqslant g(x)$, где $g \geqslant 0$ — суммируемая).

Вывод. *Пусть функции $f_n(x)$ сходятся просто к $f(x)$ при $n \to \infty$, и пусть они не превосходят по модулю фиксированной постоянной $M \geqslant 0$. Тогда, если мера множества E конечна, интегралы $\int\int_E \ldots \int f_n(x)\,dx$ стремятся при $n \to \infty$ к интегралу $\int\int_E \ldots \int f(x)\,dx$.*

Достаточно применить предложение 41 с $g(x) = M$ — суммируемой функцией на множестве E конечной меры. Видно, насколько этот вывод шире, чем предложение 40.

Как в этом выводе, так и в предложении 40 требование конечности меры множества E является существенным. Так, если положить

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{при } |x| \leqslant n^2, \\ 0 & \text{при } |x| > n^2, \end{cases} \tag{I, 3; 15}$$

то последовательность $f_n(x)$ будет равномерно сходиться к 0 при $n \to \infty$ $\left(d(0, f_n) = \frac{1}{n}\right)$. Тем не менее интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = 2n^2 \cdot \frac{1}{n} = 2n$ стремится к бесконечности вместе с n. В случае бесконечного интервала следует тщательно проверить, мажорируются ли функции f_n, но не постоянной $M \geqslant 0$, а некоторой *суммируемой* функцией $g \geqslant 0$.

Предложение 41 нелегко использовать в случае рядов. Для этого случая мы имеем следующий критерий:

Предложение 42. 1) *Если множество индексов I счетно и если члены ряда $\sum_{i \in I} u_i(x)$ неотрицательны, то всегда*

$$\int\int_{R^m} \ldots \int \left(\sum_{i \in I} u_i(x)\right) dx = \sum_{i \in I} \int\int_{R^m} \ldots \int u_i(x)\,dx, \tag{I, 3; 16}$$

причем обе части этого равенства либо конечны, либо равны $+\infty$.

2) *Если I счетно, если члены $u_i(x)$ произвольны (вещественны или комплексны) и если сумма ряда*

$$\sum_{i \in I} \int\int_{R^m} \ldots \int |u_i(x)|\,dx = \int\int_{R^m} \ldots \int \left(\sum_{i \in I} |u_i(x)|\right) dx$$

конечна, то, во-первых, каждая из функций $u_i(x)$ суммируема по x на R^m и ряд $\sum_{i\in I}\int\int_{R^m}\ldots\int u_i(x)\,dx$ суммируем; во-вторых, для почти всех значений x ряд $\sum_{i\in I} u_i(x)$ суммируем, а его сумма является функцией от x, определенной почти всюду и суммируемой на R^m; и, наконец,

$$\int\int_{R^m}\ldots\int\left(\sum_{i\in I}u_i(x)\right)dx=\sum_{i\in I}\int\int_{R^m}\ldots\int u_i(x)\,dx. \qquad (I, 3; 17)$$

Первая часть предложения 42 является наиболее важной: в случае неотрицательных членов $u_i(x)\geqslant 0$ мы всегда можем изменить порядок $\int$ и $\sum$ (как мы уже могли всегда изменить порядок двух символов $\sum$ при суммировании пачками или изменить порядок двух символов $\int$ в теореме Фубини о двойном интеграле от неотрицательной функции).

Существует иное обобщение предложения 40, относящееся к несобственным условно сходящимся интегралам Лебега $\left(\text{например, к интегралу } \int_a^{\to+\infty}\right)$. Мы его не приводим.

Дифференцирование предела последовательности и суммы ряда

Можно, казалось бы, ожидать, что если f_n равномерно сходятся к f при $a\leqslant x\leqslant b$, когда $n\to\infty$ (случай одного измерения, $m=1$), и если f_n дифференцируемы и имеют непрерывные производные, то последовательность этих производных f'_n равномерно сходится к некоторому пределу g, когда $n\to\infty$, функция f — дифференцируема и $f'=g$.

К сожалению, это не так.

Примеры. A. Последовательность $e^{nix}/\sqrt{n}$ равномерно стремится к нулю при вещественных x, когда $n\to\infty$; тем не менее производные $i\sqrt{n}e^{nix}$ равны, по модулю, корню $\sqrt{n}$, который стремится к бесконечности вместе с n.

B. В предыдущем примере предел f был все же всюду дифференцируем ($f\equiv 0$).

Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(3^n\theta)}{2^n}$. Его общий член не превосходит по модулю $\frac{1}{2^n}$, и, следовательно, ряд равномерно суммируем при вещественных θ,

Его сумма $f(\theta)$ является непрерывной функцией. Продифференцированный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n} \cos(3^n\theta)$ расходится; *Вейерштрасс* показал, что $f(\theta)$ является непрерывной функцией, нигде не дифференцируемой.

Верной теоремой является следующая:

Предложение 43. *Пусть $f_n(x)$ — последовательность непрерывных функций, имеющих непрерывные производные. Пусть последовательность $f'_n(x)$ равномерно сходится к некоторому пределу $g(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$ (a и b конечны), когда $n \to \infty$. Пусть, наконец, в некоторой фиксированной точке x_0 интервала (a, b) последовательность $f_n(x_0)$ имеет предел, когда $n \to \infty$.*

Тогда последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится к некоторому пределу $f(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$, когда $n \to \infty$; этот предел $f(x)$ дифференцируем и $f'(x) = g(x)$.

В самом деле, имеем

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'_n(\xi)\, d\xi. \qquad \text{(I, 3; 18)}$$

По предположению, $f_n(x_0)$ имеет предел; в силу предложения 40 интеграл также имеет предел, который есть не что иное, как $\int_{x_0}^{x} g(\xi)\, d\xi$, причем сходимость интеграла к пределу равномерна по x. Тем самым доказано, что f_n равномерно сходится к некоторому пределу f, и поскольку

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(\xi)\, d\xi,$$

где g — непрерывна, этот предел f дифференцируем и $f' = g$.

Ч. и т. д.

Итак, если известно, что некоторая функция представляется сходящимся или суммируемым рядом $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ и если желательно знать, дифференцируема ли f, то следует продифференцировать ряд формально: $\sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x)$; затем следует убедиться, что *продифференцированный ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x)$ равномерно сходится при $a \leqslant x \leqslant b$; если это так, то функция f заведомо

будет дифференцируемой, причем $f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x)$. (Почленное дифференцирование ряда, или дифференцирование под знаком $\sum$.) Если же, напротив, продифференцированный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x)$ не сходится равномерно, то нельзя утверждать, что f дифференцируема, и даже если она дифференцируема, а продифференцированный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x)$ сходится в некоторой точке x_0, то нельзя утверждать, что ее производная равна в точке x_0 сумме ряда $\sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x_0)$.

Пример. Ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{ni\theta}$ представляет непрерывную функцию, имеющую непрерывные производные до порядка $\leqslant k$, если $|a_n|\leqslant \frac{1}{n^{k+2}}$ при $|n|\to\infty$.

2. Функции, представимые интегралами. Для простоты будем рассматривать однократные интегралы, обобщение на многократные производится очевидным образом. Пусть $F(x)=\int_a^b f(x, t)\,dt$. Предполагается, что для любого x из некоторого множества E (которое, для простоты, мы будем считать лежащим в R) интеграл имеет смысл (суммируем, условно сходится и т. п.). Этот интеграл определяет, таким образом, некоторую функцию от x. Возникает задача исследовать непрерывность, интегрируемость или дифференцируемость F, отправляясь от аналогичных свойств f.

Непрерывность интеграла

Мы хотим знать, будет ли $\int_R f_x(t)\,dt \to \int_R f_{x_0}(t)\,dt$ при $x\to x_0$, где через $f_x(t)$ обозначена функция от t, определяемая функцией f при фиксированном x. Со всеми результатами мы уже познакомились в связи с интегрируемостью предела последовательности (предложения 40 и 41).

Предложение 44 (соответствующее предложению 40). *Если $f_x(t)$ стремится к $f_{x_0}(t)$ при $x\to x_{x_1}$ равномерно по t, пробегающему интервал интегрирования (a, b), и если этот интервал конечен, то $\int_{(a,b)} f_x(t)\,dt$ стремится к $\int_{(a,b)} f_{x_0}(t)\,dt$.*

В самом деле,

$$\left|\int\limits_{(a,\, b)} \left(f_x(t) - f_{x_0}(t)\right) dt\right| \leqslant (b-a)\, d\left(f_x(t),\ f_{x_0}(t)\right). \qquad (I, 3; 19)$$

Таким образом, если $\varepsilon > 0$ задано, то существует такое $\eta > 0$, что при $|x - x_0| \leqslant \eta$ выполняется неравенство

$$d\left(f_x(t), f_{x_0}(t)\right) = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |f(x,\ t) - f(x_0,\ t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Тогда

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Вывод. *Если интервал интегрирования* $(a,\ b)$ *конечен и если при* $a \leqslant t \leqslant b$, $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ *функция* f *непрерывна по совокупности переменных* x, t, *то* $F(x)$ *будет непрерывной функцией* x *в интервале* $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$.

В самом деле, функция f при этих условиях *равномерно* непрерывна. Иными словами, для данного $\varepsilon > 0$ существует $\eta > 0$ такое, что при $|x_2 - x_1| \leqslant \eta$, $|t_2 - t_1| \leqslant \eta$ выполняется неравенство $|f(x_2,\ t_2) - f(x_1,\ t_1)| \leqslant \varepsilon$. Тогда при $|x - x_0| \leqslant \eta$ и произвольном t имеем

$$\left|f_x(t) - f_{x_0}(t)\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{или} \quad d\left(f_x(t),\ f_{x_0}(t)\right) \leqslant \varepsilon \qquad (I, 3; 20)$$

и можно применить предложение 44.

Замечание. Функция от x и t, *раздельно* непрерывная по каждому из переменных, когда другое фиксировано, не обязательно будет непрерывной по совокупности двух переменных. Так, например, функция

$$f(x,\ t) = \begin{cases} \dfrac{xt}{x^2 + t^2} & \text{при } (x,\ t) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{при } x = t = 0 \end{cases} \qquad (I, 3; 21)$$

раздельно непрерывна по x и по t в начале координат. Тем не менее она не является непрерывной в начале координат, ибо на прямой $x = mt$ она принимает значение $\frac{m}{1+m^2}$ при $t \neq 0$ и значение 0 при $t = 0$.

Предложение 45 (Лебег) (соответствующее предложению 41). *Если* f *раздельно непрерывна по* x *в точке* x_0 *при почти всех значениях* t *и если* $f(x,\ t)$ *мажорируется по модулю суммируемой функцией* $g(t)$ *(интервал интегрирования произволен), то* F *непрерывна по* x *в точке* x_0.

Замечание. В некоторых случаях следует комбинировать приведенные здесь результаты с другими результатами. Это приходится делать при работе с условно-сходящимися несобственными интегралами Лебега. Рассмотрим, например, интеграл

$$F(x) = \int_{\to -\infty}^{\to +\infty} a(t)\, e^{ixt}\, dt. \qquad (I, 3; 22)$$

Если $a(t)$ суммируема, то предложение 45 тут же показывает, что F непрерывна при всех значениях x, ибо функция $|a(t)\, e^{ixt}| = |a(t)|$ — суммируема. Пусть $a(t)$ не суммируема. Предположим, что $a(t)$ непрерывна и что при $t \to +\infty$, а также при $t \to -\infty$ функция $a(t) \geqslant 0$ монотонна и стремится к 0. Тогда, согласно теореме Абеля, интеграл $F(x)$ определен при $x \neq 0$.

Рассмотрим

$$F_n(x) = \int_{-n}^{n} a(t)\, e^{ixt}\, dt. \qquad (I, 3; 23)$$

При фиксированном n этот интеграл будет непрерывной функцией x в силу предложения 44 или 45.

Функция $F_n(x)$ стремится к $F(x)$, когда $n \to \infty$ равномерно при $x \geqslant \delta > 0$, в силу теоремы Абеля (стр. 46). В самом деле:

$$|F(x) - F_n(x)| \leqslant \left| \int_{n}^{\to +\infty} \right| + \left| \int_{\to -\infty}^{-n} \right| \leqslant \frac{2}{\delta}(a(n) + a(-n)). \qquad (I, 3; 24)$$

Поскольку $a(t) \to 0$ при $t \to \pm\infty$, существует такое N, что при $n \geqslant N$ выполняются неравенства $a(n) \leqslant \varepsilon_1$, $a(-n) \leqslant \varepsilon_1$. Тогда $|F(x) - F_n(x)| \leqslant \leqslant \frac{4\varepsilon_1}{\delta}$. Если $\varepsilon > 0$ дано, то полагаем $\varepsilon_1 = \frac{\delta}{4}\varepsilon$. При $|x| \geqslant \delta$ будем иметь $d(F(x), F_n(x)) \leqslant \varepsilon$. Предложение 39 показывает, таким образом, что $F(x)$ непрерывна в любой точке $x_0 \neq 0$.

То же самое справедливо и для интегралов $\int_0^{\to +\infty} a(t) \cos tx\, dt$, $\int_0^{\to +\infty} a(t) \sin tx\, dt$. Последний из этих интегралов существует также при $x = 0$, однако признак Абеля будет *равномерно* применим только при

$|x| \geqslant \delta > 0$. Поэтому можно только утверждать, что этот интеграл представляет функцию, определенную при всех x и непрерывную в любой точке $x_0 \neq 0$. Именно это явление показывают нам многочисленные примеры.

Интегрируемость интеграла

Пусть $F(x)$ суммируема, и мы хотим узнать, можно ли интеграл

$$\int_\alpha^\beta F(x)\,dx = \int_\alpha^\beta dx \int_a^b f(x, t)\,dt$$

записать в виде $\int_a^b dt \int_\alpha^\beta f(x, t)\,dx$.

С этим результатом мы уже знакомы (теорема Фубини).

Дифференцируемость интеграла

Пусть E — конечный интервал $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$.

Предложение 46. *Пусть f имеет частную производную $f'_x(x, t)$ при почти всех значениях t. Пусть $f'_x(x, t)$ раздельно непрерывна по x при почти всех t и мажорируется по модулю суммируемой функцией $g(t) \geqslant 0$* [*интервал (a, b) — произволен*]. *Пусть, наконец, интеграл $\int_a^b f(x, t)\,dt$ имеет смысл при некотором частном значении $x = x_0$.*

Тогда этот интеграл $F(x)$ имеет смысл при всех $x \in E$, функция $F(x)$ непрерывна и дифференцируема, причем

$$F'(x) = \int_a^b f'_x(x, t)\,dt \tag{I, 3; 25}$$

(дифференцирование под знаком $\int$).

Пусть $(a, b) = (-\infty, +\infty)$. Во-первых, функция $G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f'_x(x, t)\,dt$ непрерывна. Далее:

$$\int_{x_0}^{x} G(\xi)\,d\xi = \int_{x_0}^{x} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f'_x(\xi, t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{x_0}^{x} f'_x(\xi, t)\,d\xi. \tag{I, 3; 26}$$

[Изменение порядка интегрирования законно. Действительно, $|f'_x(\xi, t)| \leqslant g(t)$,

а функция $g(t)$ суммируема по (ξ, t) при $\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta$ (конечный интервал), $-\infty < t < \infty$, поскольку она $\geqslant 0$ и интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt$ конечен.]

Наконец

$$\int_{x_0}^{x} G(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x, t) - f(x_0, t)]\, dt. \qquad (I, 3; 27)$$

По предположению, интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, t)\, dt$ имеет смысл, значит, интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t)\, dt$ также имеет смысл и определяет некоторую функцию $F(x)$, $x \in E$. Кроме того,

$$F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^{x} G(\xi)\, d\xi. \qquad (I, 3; 28)$$

Поскольку G непрерывна, функция F непрерывна и дифференцируема, причем $F'(x) = G(x)$.

Примеры. Здесь также часто бывает необходимо комбинировать эту теорему с другими теоремами. Это приходится делать в случае несобственных условно сходящихся интегралов Лебега.

Рассмотрим, например, функцию

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2}\, dt. \qquad (I, 3; 29)$$

Она непрерывна, ибо $\frac{e^{itx}}{1+t^2}$ непрерывна по (x, t) и мажорируется по модулю суммируемой функцией $\frac{1}{1+t^2}$. Продифференцируем формально:

$$F'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{it}{1+t^2}\, dt. \qquad (I, 3; 30)$$

Функция $\frac{t}{1+t^2}$ не суммируема, однако интеграл $\int_{\to -\infty}^{\to +\infty}$ существует при $x \neq 0$ в силу теоремы Абеля. [Функция $\frac{t}{1+t^2}$ убывает при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$,

ибо ее производная равна $\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$.] Положим $F_n(x)=\int_{-n}^{n}\frac{e^{itx}}{1+t^2}dt$. Тогда F_n будет непрерывной и дифференцируемой при всех x, причем $F'_n(x)=\int_{-n}^{n}e^{itx}\frac{it}{1+t^2}dt$. Когда $n\to\infty$, последовательность $F'_n(x)$ сходится к пределу $G(x)=\int_{\to-\infty}^{\to+\infty}e^{itx}\frac{it}{1+t^2}dt$ равномерно при $|x|\geqslant\delta>0$. [Остаток $\int_{-\infty}^{-n}+\int_{n}^{\infty}$ мажорируется по модулю величиной $2\cdot\frac{2}{\delta}\cdot\frac{n}{1+n^2}$, которая будет $\leqslant\varepsilon$ при достаточно больших n.] В то же время последовательность $F_n(x)$ равномерно сходится к $F(x)$ при вещественных x. Значит, в силу теоремы о дифференцируемости предела последовательности, функция F имеет производную во всякой точке $x_0\neq 0$ и эта производная непрерывна, причем

$$F'(x)=G(x)=\int_{\to-\infty}^{\to+\infty}e^{itx}\frac{it}{1+t^2}dt. \qquad (I, 3; 31)$$

О второй производной ничего нельзя сказать, ибо функция $\frac{e^{itx}(-t^2)}{1+t^2}$ не приводит к сходящемуся интегралу.

В дальнейшем мы увидим, что

$$F(x)=\pi e^{-|x|}; \qquad (I, 3; 32)$$

функция $F(x)$ заведомо непрерывна при всех x, имеет непрерывную производную в любой точке $x\neq 0$ и имеет производные всех порядков в области, дополнительной к началу координат $x=0$. Однако интегральное представление этой функции не показывает нам этого.

Приложения. Непрерывность и дифференцируемость потенциала зарядов, распределенных по объему

Пусть U — ньютонов потенциал, создаваемый электрическими зарядами ограниченной плотности $\mu(x)$ ($|\mu(x)|\leqslant M$), равной нулю вне некоторого ограниченного множества X. Имеем [формула (I, 2; 50)]:

$$U(a)=\iiint_X\frac{\mu(x)}{|x-a|}dx. \qquad (I, 3; 33)$$

Мы хотим показать, что $U(a)$ — непрерывная функция a. Это не вытекает непосредственно из уже рассмотренных теорем, ибо подинтегральная функ-

ция $\frac{\mu(x)}{|x-a|}$ обращается в бесконечность при $x=a$ и, стало быть, имеет подвижную особенность, перемещающуюся вместе с a; в частности, нельзя добиться мажорирования $\frac{|\mu(x)|}{|x-a|} \leqslant g(x)$ с суммируемой g, не зависящей от a, ибо если мы положим $a=x$, то будем иметь $g(x)=\infty$ (при условии, что $\mu(x)\neq 0$). Здесь снова необходимо комбинировать указанные методы.

Заметим сначала, что если a меняется в открытом множестве Ω пространства R^3, не содержащем зарядов [$\mu(x)=0$ при $x\in\Omega$], то $U(a)$ будет непрерывной и даже бесконечно дифференцируемой функцией a. Причем все ее частные производные получаются дифференцированием под знаком $\int\int\int$. В самом деле, при $a\in\Omega$ и $x\in C\Omega$ функция $\frac{1}{|x-a|}$ имеет частные производные всех порядков по a. Эти частные производные непрерывны и, значит, раздельно непрерывны по a. Они ограничены, пока a остается на некотором расстоянии $\geqslant d>0$ от границы Ω; если μ ограничена и если объем интегрирования ограничен, то предложения 45 и 46 дают сформулированный результат. В частности, обозначив через a_i ($i=1, 2, 3$) координаты точки a, будем иметь

$$\frac{\partial^2}{\partial a_i^2}U(a)=\int\int_X\int \mu(x)\frac{\partial^2}{\partial a_i^2}\left(\frac{1}{|x-a|}\right)dx. \qquad \text{(I, 3; 34)}$$

И, значит, полагая $\Delta U(a)=\sum\limits_{i=1,2,3}\frac{\partial^2}{\partial a_i^2}U(a)$ (дифференциальный оператор Δ называется лапласианом), получим

$$\Delta U(a)=\int\int_X\int \mu(x)\,\Delta_a\frac{1}{|x-a|}\,dx=0, \qquad \text{(I, 3; 35)}$$

ибо $\Delta_a\frac{1}{|x-a|}=0$ при $x\neq a$. Таким образом, потенциал $U(a)$ *гармоничен* (что означает, что $\Delta U=0$) в открытом множестве Ω, не содержащем зарядов.

Перейдем теперь к общему случаю.

Пусть $a_0\in R^3$, $\rho>0$. Оценим интеграл

$$\int\int\int_{|x-a_0|\leqslant\rho}\frac{\mu(x)}{|x-a|}dx. \qquad \text{(I, 3; 36)}$$

При $|a-a_0|\leqslant 2\rho$ он мажорируется величиной

$$M\iiint\limits_{|x-a|\leqslant 3\rho}\frac{dx}{|x-a|}=M\iiint\limits_{r\leqslant 3\rho}\frac{dx}{r}=18\pi M\rho^2 \qquad (I, 3; 37)$$

[формула (I, 2; 51)].

При $|a-a_0|\geqslant 2\rho$ во всем объеме интегрирования имеем неравенство $|x-a|\geqslant\rho$; поэтому интеграл (I, 3; 36) мажорируется величиной

$$\frac{M}{\rho}\iiint\limits_{|x-a_0|\leqslant\rho}dx=\frac{M}{\rho}\frac{4}{3}\pi\rho^3=\frac{4}{3}\pi M\rho^2. \qquad (I, 3; 38)$$

Таким образом, этот интеграл будет сколь угодно малым при достаточно малых ρ, причем это не зависит от положения точки $a_0\in R^3$. Иными словами, функция от a, зависящая от параметра ρ:

$$U_\rho(a)=\iiint\limits_{\substack{|x-a_0|\geqslant\rho\\ x\in X}}\frac{\mu(x)}{|x-a|}dx, \qquad (I, 3; 39)$$

стремится, при $\rho\to 0$, равномерно по a к функции $U(a)$.

В силу предложения 39, для того, чтобы быть уверенным, что U непрерывна в точке a_0, достаточно знать, что U_ρ при $\rho>0$ непрерывна в a_0. Но ведь при $\rho>0$ функция U_ρ является потенциалом распределения зарядов с плотностью 0 в шаре $|x-a_0|<\rho$ и с плотностью $\mu(x)$ вне этого шара; значит, в силу того, что мы уже видели, функция U_ρ непрерывна в точке a_0.

Продифференцировав формально под знаком $\iiint$, мы получим функцию

$$V_i(a)=\iiint\limits_X\mu(x)\frac{\partial}{\partial a_i}\frac{1}{|x-a|}dx=\iiint\limits_X\mu(x)\frac{x_i-a_i}{|x-a|^3}dx. \qquad (I, 3; 40)$$

Поскольку $\left|\frac{x_i-a_i}{|x-a|^3}\right|\leqslant\frac{1}{|x-a|^2}$, мы имеем в точке a особенность типа $\frac{1}{r^\alpha}$, где $\alpha=2<3$. В силу предложения 33, интеграл во второй и третьей частях равенства (I, 3; 40) имеет смысл. Рассуждение, полностью аналогичное тому, которое мы только что проделали, показывает, что этот интеграл представляет собой непрерывную функцию от a. Остается показать, что эта функция $V_i(a)$ равна именно $\frac{\partial}{\partial a_i}U(a)$. Для этого, как в предложении 45, нужно использовать метод интегрирования и показать, что именно U есть неопре-

деленный (частный по a_i) интеграл от V_i. Точнее, пусть b и c — две точки (с координатами b_j, c_j, $j=1, 2, 3$), расположенные на одной и той же прямой, параллельной оси x_i ($b_j = c_j$ при $j \neq i$). Мы должны лишь доказать, что

$$\int_{b_i}^{c_i} V_i(a)\,da_i = U(c) - U(b). \qquad (I, 3; 41)$$

Здесь подразумевается, что координаты a_j, $j \neq i$, точки a в левой части фиксированы и равны $b_j = c_j$; единственная переменная координата — координата a_i — служит переменной интегрирования. Запишем этот интеграл в виде

$$\int_{b_i}^{c_i} da_i \iiint_X \mu(x) \frac{x_i - a_i}{|x-a|^3}\,dx. \qquad (I, 3; 42)$$

Предположим, что мы имеем право изменить порядок интегрирования; тогда получим

$$\iiint_X \mu(x)\,dx \int_{b_i}^{c_i} \frac{\partial}{\partial a_i} \frac{1}{|x-a|}\,da_i. \qquad (I, 3; 43)$$

Но ведь внутренний интеграл имеет смысл и равен $\frac{1}{|x-c|} - \frac{1}{|x-b|}$ при всех x, не лежащих на отрезке (b, c). Этот отрезок является множеством меры нуль в R^3. Значит, интеграл (I, 3; 43) заведомо равен

$$\iiint_X \frac{\mu(x)}{|x-c|}\,dx - \iiint_X \frac{\mu(x)}{|x-b|}\,dx = U(c) - U(b), \qquad (I, 3; 44)$$

откуда вытекает равенство (I, 3; 41).

Таким образом, все основано на возможности изменить порядок интегрирования в формуле (I, 3; 42). В силу вывода из предложения 29, для этого достаточно показать, что интеграл

$$\iiint_X |\mu(x)|\,dx \int_{b_i}^{c_i} \left| \frac{\partial}{\partial a_i} \frac{1}{|x-a|} \right| da_i \qquad (I, 3; 45)$$

конечен.

Имеем оценку:

$$\int_{b_i}^{c_i} \left| \frac{\partial}{\partial a_i} \frac{1}{|x-a|} \right| da_i \leqslant \int_{b_i}^{c_i} \frac{da_i}{|x-a|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da_i}{(x_i-a_i)^2 + \sum_{j \neq i} (x_j-b_j)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2+k^2} = \frac{\pi}{k}, \qquad \text{(I, 3; 46)}$$

где $k^2 = \sum_{j \neq i} (x_j - b_j)^2$.

Тогда для интеграла (I, 3; 45) имеем оценку

$$\pi M \iiint_X \frac{dx}{\sqrt{\sum_{j \neq i} (x_j-b_j)^2}}. \qquad \text{(I, 3; 47)}$$

Пусть, для удобства, $i = 1$; интеграл (I, 3; 47), согласно теореме Фубини, можно записать в виде

$$\pi M \int_{x \in X} dx_1 \iint_{x \in X} \frac{dx_2\, dx_3}{\sqrt{(x_2-b_2)^2+(x_3-b_3)^2}} \qquad \text{(I, 3; 48)}$$

(подинтегральная функция $\geqslant 0$). Двойной интеграл распространяется на ограниченную площадку (поскольку объем интегрирования X ограничен) его подинтегральная функция имеет в точке (b_2, b_3) особенность типа $\frac{1}{r^\alpha}$ с $\alpha = 1 < 2$ и, следовательно, этот интеграл конечен. Интеграл по x_1 также конечен, поскольку X ограничено, следовательно, весь интеграл (I, 3; 48) конечен.

Ч. и т. д.

Если бы теперь мы попытались аналогичным образом подсчитать частные производные второго порядка функции U, то мы столкнулись бы с трудностью. Действительно, частные производные второго порядка по a от функции $\frac{1}{|x-a|}$ имеют при x, близких к a, особенность типа $\frac{1}{r^\alpha}$ с $\alpha = 3$. Поэтому возникающие здесь интегралы не имеют смысла Если не сделать дополнительных предположений о плотности μ, то легко проверить на примерах, что функция *U не будет* дважды дифференцируемой.

Кроме того, формула (I, 3; 35) *всегда ложна* в области, занятой зарядами (тогда как она была бы правильной, если бы можно было дифференцировать U, дифференцируя дважды под знаком $\iiint$; это показывает,

что математические предосторожности при выполнении таких действий отнюдь не преувеличены). Как известно, имеет место формула Пуассона

$$\Delta U(a) = -4\pi\mu(a) \qquad (I, 3; 49)$$

(по крайней мере если μ один раз непрерывно дифференцируема). Все эти свойства потенциала мы рассмотрим в дальнейшем с другой точки зрения, используя операцию свертки.

Замечание. Формулу (I, 3; 33) путем замены переменных можно представить в виде

$$U(a) = \int\int\int \frac{\mu(a-x)}{|x|} dx. \qquad (I, 3; 50)$$

Предположим, что μ непрерывна на R^3, а не только ограничена. Тогда функция $\mu(a-x)/|x|$ раздельно непрерывна по a всюду, кроме точки $x=0$; она мажорируется функцией $M/|x|$, суммируемой в силу того, что $|x| = r^\alpha$ с $\alpha = 1 < 3$, и в силу того, что объем интегрирования ограничен (этот объем есть $X+a$ — множество точек вида $x+a$, где x пробегает X; это множество подвижно вместе с a, однако при ограниченном a оно содержится в фиксированном ограниченном объеме, который можно принять за область интегрирования). Это рассуждение показывает, в силу предложения 41, что U непрерывна. Это доказательство, в котором функция μ предполагается непрерывной, является более простым, чем то, которое мы дали для ограниченной μ; если же μ p раз непрерывно дифференцируема, то подобное рассуждение легко приводит к непрерывной дифференцируемости функции U p раз. Производные вычисляются формальным дифференцированием под знаком $\int\int\int$:

$$\frac{\partial U}{\partial a_i} = \int\int\int \frac{1}{|x|} \frac{\partial}{\partial a_i} \mu(a-x)\, dx. \qquad (I, 3; 51)$$

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ I

Упражнение I-1. Показать, что если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ сходится условно, то оба ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n^+$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n^-$ расходятся. Вывести отсюда, что ряд $\sum\limits_{i \in N} u_i$ не удовлетворяет критерию Коши для суммируемых рядов. Упражнение

можно начать с непосредственного разбора гармонического знакопеременного ряда.

Упражнение I-2. Показать, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ сходится условно, то, изменяя порядок его членов, его можно сделать сходящимся к произвольной наперед заданной сумме, а также расходящимся к $+\infty$ и расходящимся к $-\infty$.

Упражнение I-3. Показать, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ сходится и остается сходящимся при любом порядке его членов, то он сходится абсолютно.

Упражнение I-4. (Характеристические функции множеств.) Пусть A и B — два подмножества из R^n. Обозначим через $A-B$ подмножество R^n, состоящее из точек, принадлежащих A и не принадлежащих B.

Положим

$$A \Delta B = (A-B) \cup (B-A) \text{ [1]}.$$

Обозначим через χ_A (соответственно χ_B) характеристическую функцию множества A (соответственно B). Доказать формулы

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B, \tag{1}$$

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}, \tag{2}$$

$$\chi_{A \Delta B} = |\chi_A - \chi_B|. \tag{3}$$

Сопоставьте формулу (2) с предложением 24.

Упражнение I-5. (Интегралы по сферам в R^n.) Выразить через площадь S_n единичной сферы в R^n объем шара радиуса R и момент инерции однородного шара радиуса R по отношению к его центру.

Упражнение I-6. I. Примем стандартные обозначения:

$$i = \sqrt{-1}, \qquad e^{it} = \cos t + i \sin t, \qquad |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Считая x вещественным, $0 < x < 2$, показать, что

$$\left| e^{in\pi x} + e^{i(n+1)\pi x} + \ldots + e^{im\pi x} \right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{\pi x}{2}\right|}.$$

---

[1]) Симметрическая разность множеств A и B, разделительное **„или“** в исчислении высказываний. — *Прим. перев.*

Тогда очевидное неравенство $|b| \leqslant |a+ib|$ дает

$$|\sin n\pi x + \sin(n+1)\pi x + \ldots + \sin m\pi x| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|}. \qquad (1)$$

Пользуясь оценкой (1) и формулой

$$u_n v_n + u_{n+1} v_{n+1} + \ldots + u_m v_m = \\ = (u_n - u_{n+1}) v_n + (u_{n+1} - u_{n+2})(v_n + v_{n+1}) + \ldots \\ \ldots + u_m (v_n + v_{n+1} + \ldots + v_m),$$

получить оценку

$$\left|\frac{1}{n}\sin n\pi x + \frac{1}{n+1}\cdot\sin(n+1)\pi x + \ldots + \frac{1}{m}\sin m\pi x\right| \leqslant \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|}. \qquad (2)$$

II. Показать, что тригонометрический ряд

$$\frac{1}{12} + \frac{4}{\pi^3}\left(\sin\pi x + \frac{1}{3^3}\sin 3\pi x + \ldots + \frac{1}{(2p+1)^3}\sin(2p+1)\pi x + \ldots\right) - \\ - \frac{1}{2\pi^2}\left(\cos 2\pi x + \frac{1}{2^2}\cos 4\pi x + \ldots + \frac{1}{p^2}\cos 2p\pi x + \ldots\right)$$

сходится при всех x, $-1 \leqslant x < 1$. Этот ряд определяет в интервале $(-1, +1)$ вещественно-значную функцию, которую мы назовем $f(x)$.

III. Показать, что ряд, полученный почленным дифференцированием ряда для $f(x)$, сходится при $0 < |x| < 1$. Обозначим через $g(x)$ ряд, полученный почленным дифференцированием из ряда для $f(x)$; функция $g(x)$ определена пока только при $-1 < x < 0$ и $0 < x < 1$. Учитывая, что ряд с общим членом $\frac{1}{n^2}$ имеет суммой $\frac{\pi^2}{6}$, вычислить $g(0)$. Показать, что $f(x)$ — функция, непрерывная в каждой точке интервала $(-1, 1)$.

IV. Пусть

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad -1 \leqslant x < 0, \\ 1 - 2x, & \text{если} \quad 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

— функция, определенная в интервале $(-1, +1)$.

Положим

$$G(0) = \frac{1}{2}(G(-0) + G(+0)),$$

где

$$G(-0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} G(x) \quad \text{и} \quad G(+0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} G(x).$$

Написать разложение в ряд Фурье функции $G(x)$. Вывести отсюда формулу для $f(x)$ в интервале $(-1, 0)$ и формулу для $f(x)$ в интервале $(0, 1)$. По значению $f(0)$ определить сумму ряда с общим членом $\frac{1}{n^2}$.

Что можно сказать о производной функции f в начале координат?

Упражнение I-7. I. Положим

$$e_0(x) = e^{-x^2}, \qquad e_n(x) = \int_{-\infty}^{x} e_{n-1}(t)\,dt.$$

1°. Показать, что эти функции существуют.

2°. Пусть

$$f_1(x) = e_2(x),$$

а функции $f_2(x), \ldots, f_n(x)$ определяются при $n > 1$ из уравнения

$$f_n'''(x) + 2xf_n''(x) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x) f_{n-i}''(x),$$

причем

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{x\to-\infty} f_n'(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{x^2} f_n''(x) = 0.$$

Показать, что $f_n''(x) \leqslant e_0(x) e_3^{n-1}(x)$, $f_n(x) \leqslant e_2(x) e_3^{n-1}(x)$, и вывести отсюда, что эти функции существуют.

II. 1°. Пусть $A > 0$ дано. Показать, что при x, не превосходящем некоторого значения $X_1(A)$, ряд

$$-2x + \sum_{i=1}^{\infty} A^i f_i(x) \tag{1}$$

сходится и его сумма является некоторым решением уравнения

$$y''' = yy''. \tag{2}$$

2°. Пусть $Z_A(x)$ — решение уравнения (2), которое совпадает с суммой ряда (1) при $x < X_1(A)$ [область существования функции $Z_A(x)$ может быть отличной от области сходимости ряда (1)].

Показать, записав уравнение (2) в виде $y'' = Ce^{\int y(x)\,dx}$, что либо функция $Z_A(x)$ существует при любом x, либо же $Z_A(x)$ существует при $x < x_0(A)$ и стремится к бесконечности, когда x стремится к $x_0(A)$.

3°. Показать, что для всех значений x, при которых $Z_A(x)$ существует, сумма $S_n(x)$ первых n членов ряда (1) не превосходит $Z_A(x)$ (показать, что

$h(x) = Z_A(x) - S_n(x)$ удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению, из которого вытекает, что $h''(x) \geqslant 0$).

4°. Вывести отсюда, что область существования $Z_A(x)$ совпадает с областью сходимости ряда (1).

Упражнение I-8. I. Мы хотим получить принадлежащий Фейнману метод интегрирования для произведения некоторых множителей. С этой целью мы устанавливаем две формулы, позволяющие преобразовать произведение n множителей в интеграл от n-й степени некоторого выражения.

Первая формула Фейнмана:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} = (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \ldots \int_0^{1-x_1-x_2-\ldots-x_{n-1}} dx_{n-1} \times$$

$$\times \frac{1}{[(a_{n-1}-a_n)x_{n-1} + (a_{n-2}-a_n)x_{n-2} + \ldots + (a_1 - a_n)x_1 + a_n]^n},$$

$$(a_i > 0).$$

1°. Доказать эту формулу непосредственно, используя следующие соотношения и замены переменных:

$$\frac{1}{a_p} = \int_0^\infty e^{-a_p y_p} dy_p; \qquad X = \sum_{i=1}^n y_i; \qquad x_i = \frac{y_i}{X}.$$

Здесь возникает некоторый интеграл с $n+1$ переменным, которые связаны простым соотношением. Чтобы получить приведенную выше формулу, надо выполнить интегрирование по X.

2°. Доказать эту формулу по индукции.

Вторая формула Фейнмана:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} = (n-1)! \int_0^1 dx_1 \ldots \int_0^1 dx_{n-1} \times$$

$$\times \frac{x_1^{n-2} x_2^{n-3} \ldots x_{n-2}}{[(a_n - a_{n-1})x_{n-1} \ldots x_1 + (a_{n-1} - a_{n-2})x_{n-2} \ldots x_1 + \ldots + (a_2 - a_1)x_1 + a_1)]^n}.$$

1°. Доказать эту формулу по индукции.

2°. Показать, что существует некоторая замена переменных, которая позволяет перейти от первой формулы ко второй. Заметьте, что пределы интегрирования в первой формуле переменны, а во второй фиксированы.

Поэтому надо, отправляясь от первоначальных переменных, найти переменные, заключенные между 0 и 1.

II. Приложение к явному вычислению некоторого интеграла в четырехмерном пространстве.

$$\int d_4K \frac{(A \cdot K)(C \cdot (K+V))}{K^2(K^2+2(K \cdot V))(K^2+2(K \cdot W))},$$

где A, C, K, V, W — векторы с компонентами

$$A_i, \quad C_i, \quad K_i, \quad V_i, \quad W_i, \qquad i=1, 2, 3, 4.$$

$$(A \cdot V)=(A \cdot W); \qquad (C \cdot V)=(C \cdot W); \qquad V^2=W^2; \qquad (A \cdot C)=0.$$

$$(A \cdot K)=A_1K_1+A_2K_2+A_3K_3+A_4K_4;$$

$$K^2=K_1^2+K_2^2+K_3^2+K_4^2;$$

$$d_4K=dK_1\,dK_2\,dK_3\,dK_4.$$

Интегрирование распространяется на все пространство.

1°. Применить первую формулу Фейнмана к произведению

$$\frac{1}{K^2(K^2+2(K \cdot V))(K^2+2(K \cdot W))}.$$

2°. Проинтегрировать по K с помощью некоторой линейной замены переменных и введения полярных координат в четырехмерном пространстве:

$$S_1=R\cos a_1, \qquad S_2=R\cos a_2\sin a_1,$$

$$S_3=R\cos a_3\sin a_2\sin a_1,$$

$$S_4=R\sin a_3\sin a_2\sin a_1.$$

3°. Возникший при этом двойной интеграл по x_1 и x_2 вычислить с помощью замены переменных $x_1+x_2=w$, $x_1=uw$.

Упражнение I-9. (Сходимость последовательностей функций.) I. Пусть E — линейное векторное пространство над полем комплексных чисел C. Отображение $\vec{x} \to \|\vec{x}\|$ пространства E в R называется нормой, если оно обладает следующими свойствами:

$$\|\vec{x}\| \geqslant 0 \text{ для любого } \vec{x} \in E \text{ и } \|\vec{x}\|=0 \Longleftrightarrow \vec{x}=\vec{0},$$

$$\|\lambda\vec{x}\|=|\lambda| \cdot \|\vec{x}\| \text{ для любого } \lambda \in C \text{ и любого } \vec{x} \in E,$$

$$\|\vec{x}+\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\| \text{ для любых } \vec{x},\ \vec{y} \in E.$$

Говорят, что последовательность векторов $\vec{x}_n$ из E сходится к $\vec{x}$ в пространстве E в топологии, определяемой нормой $\|\cdot\|$, и пишут $\vec{x}_n \to \vec{x}$, если $\|\vec{x}_n - \vec{x}\| \to 0$, когда $n \to \infty$. Говорят, что $\vec{x}_n$ образуют последовательность Коши в топологии, определяемой нормой $\|\cdot\|$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое целое число n_0, что для любой пары целых чисел m, n, больших n_0, выполняется неравенство $\|\vec{x}_m - \vec{x}_n\| \leqslant \varepsilon$.

1°. Показать, что если $\vec{x}_n \to \vec{x}$ и $\vec{y}_n \to \vec{y}$ в E, то $\vec{x}_n + \vec{y}_n \to \vec{x} + \vec{y}$.

2°. Показать, что если $\vec{x}_n \to \vec{x}$ в E и если λ_n — последовательность комплексных чисел, сходящаяся к λ, то $\lambda_n \vec{x}_n \to \lambda \vec{x}$ в E.

3°. Показать, что всякая последовательность, которая сходится в E, является последовательностью Коши. В общем случае предложение, обратное 3°, ложно и последовательность Коши в E не обязана сходиться к некоторой точке из E.

Если векторное пространство E над C снабжено нормой, для которой всякая последовательность Коши сходится к некоторому вектору из E, то говорят, что E полно в топологии, определяемой этой нормой. В этом случае E называется пространством Банаха.

II. Обозначим $\mathscr{E}^0_{[0,1]}$ — векторное пространство над C комплекснозначных функций, определенных и непрерывных на $[0, 1]$. Положим

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt,$$

$$\|f\|_2 = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|.$$

1°. Показать, что $\|f\|_1$ и $\|f\|_2$ определяют две нормы на $\mathscr{E}^0_{[0,1]}$.

2°. Показать, что если последовательность функций $f_n \in \mathscr{E}^0_{[0,1]}$ сходится к функции $f \in \mathscr{E}^0_{[0,1]}$ в смысле нормы $\|\cdot\|_1$, то $f_n(t) \to f(t)$ просто на $[0, 1]$.

3°. Показать, построив контрпример, что последовательность функций $f_n \in \mathscr{E}^0_{[0,1]}$, которая просто сходится на $[0, 1]$ к некоторой функции $f \in \mathscr{E}^0_{[0,1]}$, не обязательно сходится к f в смысле $\|\cdot\|_1$. (Можно, например, взять $f_n(t) = 0$ при $t = 0$ и $t \geqslant 1/n$, $f_n(t) = 2n^3 t$ при $0 < t \leqslant 1/2n$ и $f_n(t) = -n^3 2(t - 1/n)$ при $1/2n \leqslant t < 1/n$.)

4°. Показать, что если $f_n \to f$ в $\mathscr{E}^0_{[0,1]}$ в смысле $\|\cdot\|_2$, то $f_n \to f$ равномерно на $[0, 1]$, и обратно: если $f_n \in \mathscr{E}^0_{[0,1]}$ сходится к f равномерно на $[0, 1]$, то $f_n \to f$ в $\mathscr{E}^0_{[0,1]}$ в смысле $\|\cdot\|_2$.

5°. Пусть на векторном пространстве E заданы две нормы: $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$; говорят, что норма $\|\cdot\|_2$ тоньше (сильнее), чем норма $\|\cdot\|_1$, если существует такая постоянная K, что для любого вектора $\vec{x} \in E$ выполняется неравенство

$$\|\vec{x}\|_1 \leqslant K \|\vec{x}\|_2.$$

Говорят, что две нормы эквивалентны, если каждая из них тоньше другой.

Показать, что на $\mathcal{E}^0_{[0, 1]}$ норма $\|\cdot\|_2$ тоньше нормы $\|\cdot\|_1$.

Используя последовательность функций $f_n(t)$, определенных на $[0, 1]$ равенствами

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \geqslant 1/n, \\ -nt + 1 & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/n, \end{cases}$$

показать, что нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ не эквивалентны.

6°. Показать, что в норме $\|\cdot\|_2$ пространство $\mathcal{E}^0_{[0, 1]}$ является пространством Банаха.

7°. Пусть последовательность функций $f_n(t)$ определяется на $[0, 1]$ равенствами

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \leqslant 1/2, \\ n(t - 1/2) & \text{при} \quad 1/2 \leqslant t \leqslant (1/2 + 1/n), \\ 1 & \text{при} \quad t \geqslant (1/2 + 1/n). \end{cases}$$

Показать, что в норме $\|\cdot\|_1$ эта последовательность будет последовательностью Коши, которая не сходится ни к какой функции f из $\mathcal{E}^0_{[0, 1]}$. Таким образом, в норме $\|\cdot\|_1$ пространство $\mathcal{E}^0_{[0, 1]}$ не полно.

8°. Одно из утверждений 1°—7° неверно! Какое? Построить контрпример.

ГЛАВА II

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

§ 1. *Определение распределений*

1. Векторное пространство $\mathscr{D}$. Пространство $\mathscr{D}$ есть векторное подпространство векторного пространства комплекснозначных функций, определенных на R^n; подобная функция точки $x \in R^n$ является также функцией n вещественных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Пространство $\mathscr{D}$ определяется так:

Для того чтобы функция φ точки из R^n принадлежала $\mathscr{D}$, необходимо и достаточно, чтобы она была бесконечно дифференцируемой и чтобы существовало ограниченное множество K в R^n, вне которого φ тождественно равна нулю.

Естественно, множество K не одно и то же для всех функций φ из $\mathscr{D}$. Наименьшее *замкнутое* множество K, вне которого произвольная функция φ равна нулю, называется носителем φ. Иными словами, K есть замыкание множества точек x, для которых $\varphi(x) \neq 0$. Отсюда — определение:

Определение 1.

Пространство $\mathscr{D}$ — это пространство комплекснозначных, бесконечно дифференцируемых функций на R^n с ограниченными носителями.

Пример. Пусть $n = 1$. Функция φ, определяемая равенствами

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad |x| \geqslant 1, \\ \exp\left(-\dfrac{1}{1-x^2}\right) & \text{при} \quad |x| < 1, \end{cases} \tag{II. 1; 1}$$

принадлежит $\mathscr{D}$. Действительно, ее носитель (интервал $|x| \leqslant 1$) ограничен; она бесконечно дифференцируема при $|x| > 1$, потому что в этих точках она — тождественный нуль, и при $|x| < 1$ — как экспонента от бесконечно дифференцируемой функции. Легко, однако, показать, что она бесконечно дифференцируема всюду, поскольку ее производные всех порядков в точках $x = \pm 1$ равны нулю. Полезно заметить, что всякая конечная строка Тейлора функции φ в окрестности точек $x = \pm 1$ имеет только нулевые

члены и сводится, стало быть, к своему остаточному члену. Ряд Тейлора по степеням $x-1$ или $x+1$ сходится к 0, потому что все его члены равны нулю, и не представляет функцию $\varphi(x)>0$ при $|x|<1$. Подобная ситуация возникает для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}$, неравной тождественно нулю.

В пространстве n измерений мы имеем аналогичный пример:

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad r \geqslant 1, \\ \exp\left\{-\dfrac{1}{1-r^2}\right\} & \text{при} \quad r<1, \end{cases} \qquad \text{(II, 1; 2)}$$

$$r=|x|=\sqrt{\sum_1^n x_i^2}.$$

То, что $\mathscr{D}$ является векторным пространством, вытекает из того, что если φ_1 и $\varphi_2 \in \mathscr{D}$, то $\varphi_1+\varphi_2 \in \mathscr{D}$ и если λ — комплексное число, а $\varphi \in \mathscr{D}$, то $\lambda\varphi \in \mathscr{D}$.

Пространство $\mathscr{D}$ является даже алгеброй (или кольцом) по отношению к обычному умножению, ибо если φ_1 и $\varphi_2 \in \mathscr{D}$, то $\varphi_1\varphi_2 \in \mathscr{D}$.

Вообще если $\varphi \in \mathscr{D}$ и если ψ — бесконечно дифференцируемая функция необязательно с ограниченным носителем, то $\varphi\psi \in \mathscr{D}$ и носитель $\varphi\psi$ содержится в пересечении носителей φ и ψ.

Предложение 1. (Теорема аппроксимации.) *Пусть f — непрерывная функция с ограниченным носителем. Для любого $\varepsilon>0$ функцию f можно равномерно с точностью до ε аппроксимировать функцией $\varphi \in \mathscr{D}$, при этом можно добиться, чтобы носитель φ содержался в произвольной окрестности носителя K функции f.*

Доказательство. Пусть число $d>0$. Окрестностью размера d множества K называется множество K_d точек, расстояние которых до K не превосходит d ($\leqslant d$). K_d — замкнутое ограниченное множество, содержащее K. Мы хотим показать, что при данной f с носителем K и при данных числах $\varepsilon>0$ и $d>0$ существует $\varphi \in \mathscr{D}$ с носителем, содержащимся в K_d, такая, что „расстояние“ f от φ, т. е. $\sup\limits_{x\in R}|f(x)-\varphi(x)|$, не превосходит ε ($\leqslant \varepsilon$). Для этого обозначим через θ_1 функцию (принадлежащую $\mathscr{D}$), определенную в нашем примере формулами (II, 1; 2). Положим далее

$$\theta(x)=\frac{1}{k}\,\theta_1\left(\frac{x}{a}\right), \qquad \text{(II, 1; 3)}$$

так что носителем $\theta(x)$ будет шар $|x| \leqslant a$; число k выбирается равным интегралу

$$\int\int\limits_{R^n}\cdots\int \theta_1\left(\frac{x}{a}\right)dx=a^n\int\int\limits_{R^n}\cdots\int \theta_1(y)\,dy>0,$$

так что

$$\int\int_{R^n}\dots\int \theta(x)\,dx=1. \qquad \text{(II, 1; 4)}$$

Определим теперь функцию φ интегралом

$$\varphi(x)=\int\int_{R^n}\dots\int f(x-\xi)\,\theta(\xi)\,d\xi=\int\int_{R^n}\dots\int f(\xi)\,\theta(x-\xi)\,d\xi. \quad \text{(II, 1; 5)}$$

Покажем, что если постоянная a в формуле (II, 1; 3), определяющей θ, выбрана достаточно малой, то φ будет обладать всеми требуемыми свойствами. Во-первых, если x не принадлежит множеству K_a, то $|x-\xi|>a$ для любого $\xi\in K$; но поскольку второй из интегралов в (II, 1; 5) берется на самом деле не по R^n, а по K [в силу наличия $f(\xi)$], будем иметь $\theta(x-\xi)\equiv 0$ при $\xi\in K$ и, значит, $\varphi(x)=0$. Таким образом, φ равна нулю вне K_a и, значит, ее носитель будет содержаться в K_d, если $a\leqslant d$. Далее, φ — бесконечно дифференцируема. В самом деле, второй интеграл можно дифференцировать по x любое число раз под знаком $\int$, поскольку область интегрирования (носитель f) ограничена, а функция $f(\xi)\,\theta(x-\xi)$ имеет производные по x всех порядков и эти производные непрерывны по x и ξ. Оценим, наконец, разность $\varphi(x)-f(x)$; поскольку

$$\int\int_{R^n}\dots\int \theta(\xi)\,d\xi=1,$$

имеем

$$f(x)-\varphi(x)=\int\int_{R^n}\dots\int (f(x)-f(x-\xi))\,\theta(\xi)\,d\xi. \qquad \text{(II, 1; 6)}$$

Поскольку функция f непрерывна и имеет ограниченный носитель, она равномерно непрерывна. При данном $\varepsilon>0$ можно подобрать $\eta>0$ так, чтобы при $|\xi|\leqslant\eta$ выполнялось неравенство $|f(x)-f(x-\xi)|\leqslant\varepsilon$. Поскольку интеграл в формуле (II, 1; 6) берется на самом деле не по R^n, а по носителю функции θ, т. е. по шару $|\xi|\leqslant a$, мы имеем в этом интеграле $|f(x)-f(x-\xi)|\leqslant\varepsilon$, если a выбрано $\leqslant\eta$; поскольку, наконец, $\int\int_{R^n}\dots\int\theta(\xi)\,d\xi=1$, имеем

$$|f(x)-\varphi(x)|\leqslant\varepsilon. \qquad \text{(II, 1; 7)}$$

Таким образом, при $a\leqslant d$ и $a\leqslant\eta$ функция φ будет обладать всеми требуемыми свойствами.

Топология, или понятие сходимости в $\mathscr{D}$

Говорят, что некоторая последовательность φ_j функций, принадлежащих $\mathscr{D}$, сходится (при $j \to \infty$) к функции φ из $\mathscr{D}$, если выполняются требования:

1) *носители функций φ_j содержатся в одном и том же замкнутом множестве, не зависящем от j;*

2) *производная произвольного порядка m функций φ_j равномерно сходится при $j \to \infty$ к соответствующей производной функции φ.*

Это — сходимость „бесконечного порядка", потому что она содержит в себе равномерную сходимость любой производной. Заметим, что мы не требуем равномерной сходимости сразу по всем порядкам дифференцирования, мы требуем равномерной сходимости для каждого отдельно взятого порядка дифференцирования.

2. Распределения. Определение 2. *Распределением T называется линейный функционал, непрерывный на векторном пространстве $\mathscr{D}$.*

Это означает, что всякой функции $\varphi \in \mathscr{D}$ распределение T ставит в соответствие комплексное число $T(\varphi)$ (которое мы будем также обозначать $\langle T, \varphi \rangle$), обладающее свойствами:

$$\left.\begin{array}{l} T(\varphi_1 + \varphi_2) = T(\varphi_1) + T(\varphi_2); \\ T(\lambda\varphi) = \lambda T(\varphi), \text{ где } \lambda \text{ — комплексная постоянная.} \\ \text{Если } \varphi_j \text{ сходятся при } j \to \infty \text{ к } \varphi \text{ в смысле топологии в } \mathscr{D}, \\ \text{то комплексные числа } T(\varphi_j) \text{ стремятся при } j \to \infty \text{ к ком-} \\ \text{плексному числу } T(\varphi). \end{array}\right\} \quad \text{(II, 1; 8)}$$

Распределения сами образуют векторное пространство $\mathscr{D}'$; сумма $T_1 + T_2$ и произведение λT определяются формулами

$$\left.\begin{array}{c} \langle T_1 + T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle, \\ \langle \lambda T, \varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle, \end{array}\right\} \quad \text{(II, 1; 9)}$$

так что скалярное произведение $\langle T, \varphi \rangle$ при $T \in \mathscr{D}'$ и $\varphi \in \mathscr{D}$ оказывается билинейной формой.

Пространство $\mathscr{D}'$ является частью пространства $\mathscr{D}^*$, двойственного к $\mathscr{D}$ и состоящего из всех линейных функционалов, непрерывных или не непрерывных на $\mathscr{D}$. Используя аксиому выбора, можно математически доказать существование линейных разрывных функционалов на $\mathscr{D}$; но в явном виде нельзя привести ни одного такого функционала; мало шансов, что таковой когда-либо встретится на практике.

Примеры распределений

Пример I. Пусть f — локально суммируемая функция, т. е. функция, суммируемая на любом ограниченном множестве. Она определяет распределение T_f:

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int\int_{R^n} \dots \int f(x)\,\varphi(x)\,dx. \qquad \text{(II, 1; 10)}$$

Этот интеграл заведомо имеет смысл, ибо на самом деле интегрирование производится не по R^n, а по ограниченному носителю функции φ; на этом носителе функция f суммируема, а функция φ непрерывна, так что $f\varphi$ суммируема. С другой стороны, значение интеграла есть, разумеется, линейный функционал от φ.

Остается показать, что этот функционал непрерывен на $\mathcal{D}$. Предположим, что φ_j сходятся к φ в $\mathcal{D}$ при $j \to \infty$. Пусть K — ограниченное множество, содержащее носители всех функций φ_j. Имеем

$$|\langle T_f, \varphi_j\rangle - \langle T_f, \varphi\rangle| \leqslant \max|\varphi - \varphi_j| \cdot \int\int_K \dots \int |f(x)|\,dx. \qquad \text{(II, 1; 11)}$$

Поскольку $\max|\varphi - \varphi_j|$ стремится к 0 при $j \to \infty$, разность в левой части формулы (II, 1; 11) и подавно стремится к нулю.

Предложение 2. *Две функции f и g определяют один и тот же функционал $T_f = T_g$ тогда и только тогда, когда они почти всюду равны.*

Если f и g почти всюду равны, то, очевидно, $\langle T_f, \varphi\rangle = \langle T_g, \varphi\rangle$, какова бы ни была $\varphi \in \mathcal{D}$. Доказывать нужно обратное. Положив $f - g = h$, мы сведем утверждение к следующему: *если h — локально суммируемая функция и если при любой $\varphi \in \mathcal{D}$*

$$\int\int_{R^n} \dots \int h(x)\,\varphi(x)\,dx = 0, \qquad \text{(II, 1; 12)}$$

то $h(x)$ равна нулю почти всюду.

1) Покажем сначала, что $\int\int_{R^n} \dots \int h(x)\,\psi(x)\,dx = 0$, какова бы ни была непрерывная (но не обязательно дифференцируемая) функция ψ с ограниченным носителем. Это вытекает из теоремы аппроксимации (предложение 1); при любых $\varepsilon > 0$ и $d > 0$ существует такая функция $\varphi \in \mathcal{D}$, что $|\varphi - \psi| \leqslant \varepsilon$, и если ψ имеет носителем K, то носитель φ содержится в K_d. Имеем

$$\left|\int\int_{R^n} \dots \int (\varphi(x) - \psi(x))\,h(x)\,dx\right| \leqslant \varepsilon \int\int_{K_d} \dots \int |h(x)|\,dx. \qquad \text{(II, 1; 13)}$$

По предположению, $\int\int_{R^n}\ldots\int \varphi(x)h(x)\,dx=0$ и, значит,

$$\left|\int\int_{R^n}\ldots\int \psi(x)h(x)\,dx\right| \leqslant \varepsilon \int\int_{K_d}\ldots\int |h(x)|\,dx. \qquad \text{(II, 1; 14)}$$

Фиксируем d и устремим ε к нулю, тогда получим

$$\int\int_{R^n}\ldots\int h(x)\psi(x)\,dx=0. \qquad \text{(II, 1; 15)}$$

2) Пусть теперь $\chi(x)$ — ограниченная (измеримая) функция с ограниченным носителем. Покажем, что снова

$$\int\int_{R^n}\ldots\int h(x)\chi(x)\,dx=0. \qquad \text{(II, 1; 16)}$$

Мы опираемся здесь на теорию интеграла Лебега (гл. I, определение 3). *Если χ — измеримая функция на R^n, то существует последовательность непрерывных функций χ_j, которая при $j\to\infty$ сходится почти всюду к χ.*

В интересующем нас случае функция χ имеет ограниченный носитель, и поэтому можно считать, что носители функций χ_j содержатся в одном и том же ограниченном множестве, не зависящем от j. Если бы это было не так, то функции χ_j можно было бы заменить функциями $\alpha\chi_j$, где α — фиксированная непрерывная функция с ограниченным носителем, равная 1 на носителе функции χ.

С другой стороны, поскольку χ ограничена, можно всегда считать, что функции χ_j ограничены числом $M=\sup|\chi|$; действительно, если бы это было не так, то функции

$$\chi_j(x)=\rho_j(x)\,e^{i\omega_j(x)}$$

можно было бы заменить функциями $\sigma_j(x)e^{i\omega_j(x)}$, где $\sigma_j(x)=\min(M,\ \rho_j(x))$.

При соблюдении этих двух условий имеем, с одной стороны,

$$\int\int_{R^n}\ldots\int h(x)\chi_j(x)\,dx=0, \qquad \text{(II, 1; 17)}$$

поскольку χ_j — функции типа ψ, непрерывные и с ограниченными носителями; с другой стороны, при $j\to\infty$ имеем

$$\int\int_{R^n}\ldots\int h(x)\chi_j(x)\,dx \to \int\int_{R^n}\ldots\int h(x)\chi(x)\,dx. \qquad \text{(II, 1; 18)}$$

[Действительно, последовательность $\chi_j(x)$ сходится почти всюду к $\chi(x)$, функции $h(x)\chi_j(x)$ имеют ограниченные носители и их модули $|h(x)\chi_j(x)|$ мажорируются локально суммируемой функцией $M|h(x)|$; следовательно, по теореме Лебега имеет место равенство (II, 1; 18).] Из этих двух соотношений вытекает формула (II, 1; 16).

3) Возьмем теперь следующую функцию $\chi(x)$:

$$\chi(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } |x|>a \text{ или при } h(x)=0; \\ e^{-i\omega(x)}, \text{ если } h(x)=r(x)e^{i\omega(x)},\ |x|\leqslant a \text{ и } h(x)\neq 0. \end{cases}$$

Функция $\chi(x)$ измерима, ее модуль равен 1 или 0, а ее носитель содержится в шаре $|x|\leqslant a$.

В силу формулы (II, 1; 16), имеем

$$\int\int_{R^n}\cdots\int h(x)\chi(x)\,dx=\int\int_{|x|\leqslant a}\cdots\int|h(x)|\,dx=0. \qquad \text{(II, 1; 19)}$$

Таким образом, $|h(x)|$ является функцией, которая $\geqslant 0$ и интеграл которой по шару $|x|\leqslant a$ равен нулю; значит, $h(x)$ равна нулю почти всюду в шаре $|x|\leqslant a$; а поскольку это верно при любом a, функция h равна нулю почти всюду, что и требовалось доказать.

Следствие. *Условимся отождествлять две локально суммируемые функции f и g, если они почти всюду равны (это сводится к тому, что мы будем говорить только о классах локально суммируемых функций). Тогда понятие распределения будет обобщением понятия локально суммируемой функции. Вот почему в дальнейшем мы будем отождествлять локально суммируемую функцию f, определенную почти всюду, с функционалом T_f, который она определяет, и будем писать*

$$\langle f, \varphi\rangle=\langle T_f, \varphi\rangle=\int\int_{R^n}\cdots\int f(x)\varphi(x)\,dx. \qquad \text{(II, 1; 20)}$$

В частности, функционал, который каждой функции φ ставит в соответствие ее интеграл $\int\int_{R^n}\cdots\int\varphi(x)\,dx$, задает распределение, которое мы отождествим с функцией $f(x)=1$.

Пример II. Пусть f — локально суммируемая функция, D — символ частной производной по $x_1, x_2, \ldots, x_n$ произвольного порядка. Функционал

$$\langle T, \varphi\rangle = \int\int_{R^n}\ldots\int f(x)\,D\varphi(x)\,dx = \langle f, D\varphi\rangle \qquad \text{(II, 1; 21)}$$

задает некоторое распределение.

Пример III. *δ-распределение Дирака определяется формулой*

$$\langle\delta, \varphi\rangle = \varphi(0). \qquad \text{(II, 1; 22)}$$

Распределение Дирака $\delta_{(a)}$ в точке $a \in R^n$ определяется формулой

$$\langle\delta_{(a)}, \varphi\rangle = \varphi(a). \qquad \text{(II, 1; 23)}$$

Точно так же определяются распределения

$$\langle T, \varphi\rangle = D\varphi(a), \qquad \text{(II, 1; 24)}$$

где D — произвольная частная производная.

Математические распределения и распределения зарядов в физике

Распределения $T \in \mathcal{D}'$ можно интерпретировать как распределения электрических или магнитных зарядов, как распределения масс и т. п.

Распределение Дирака $\delta_{(a)}$ истолковывается тогда как изображение массы, равной $+1$ и помещенной в точку $a \in R^n$; распределение, связанное с локально суммируемой функцией f, истолковывается как распределение заряда с плотностью f (объем V содержит тогда заряд, равный $\int\int_V\ldots\int f(x)\,dx$). Физика приводит к многочисленным выражениям вида $\langle T, \varphi\rangle$, но φ обычно не принадлежит $\mathcal{D}$. Это значит, что каждое распределение T может быть распространено как функционал на некоторое, зависящее от T, множество, более широкое, чем $\mathcal{D}$; $\mathcal{D}$ есть общая область определения всех этих функционалов. Например, функционал δ можно распространить на все функции, непрерывные в начале координат. Функционал f — на все функции φ, такие, что $f\varphi$ суммируема, и т. д. Вот почему для того, чтобы вычислить полный заряд, вычисляют $\langle T, 1\rangle$, что дает $\int\int_{R^n}\ldots\int f(x)\,dx$ для $T = f$ и $+1$ для $T = \delta_{(a)}$; чтобы вычислить момент инерции по отношению к началу координат, вычисляют $\langle T, r^2\rangle$, что дает $\int\int_{R^n}\ldots\int f(x)\,r^2\,dx$ для $T = f$ и $|a|^2$ для $T = \delta_{(a)}$; чтобы

вычислить ньютонов потенциал в точке $b \in R^3$, вычисляют $\left\langle T, \frac{1}{|x-b|} \right\rangle$, что дает

$$\iint_{R^3}\int \frac{f(x)\,dx}{|x-b|} \quad \text{для} \quad T=f \quad \text{и} \quad \frac{1}{|a-b|} \quad \text{для} \quad T=\delta_{(a)}, \quad \text{и т. д.}$$

Рассмотрим распределение электрических зарядов, задаваемое диполем с электрическим моментом, равным $+1$. Диполь помещен в начало координат 0 на прямой R. Найдем математическое распределение, которое ему соответствует. Диполь является „пределом“ при $\varepsilon \to 0$ системы T_ε двух зарядов $\frac{1}{\varepsilon}$ и $-\frac{1}{\varepsilon}$, помещенных в точки с абсциссами ε и 0. Системе T_ε сопоставляется математическое распределение, задаваемое формулой

$$\langle T_\varepsilon, \varphi\rangle = \frac{1}{\varepsilon}\varphi(\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\varphi(0) = \frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon}. \qquad \text{(II, 1; 25)}$$

Когда $\varepsilon \to 0$, величина $\langle T_\varepsilon, \varphi\rangle$ стремится к $\varphi'(0)$. Мы пришли, таким образом, к тому, чтобы определить диполь посредством распределения

$$\langle T, \varphi\rangle = \varphi'(0); \qquad \text{(II, 1; 26)}$$

в этом определении переход к пределу обойден.

Диполь в R^n (помещенный в данную точку $a \in R^n$) с электрическим моментом $\mathfrak{M}$, ориентированным в данном направлении, определяется посредством распределения

$$\langle T, \varphi\rangle = \mathfrak{M}D\varphi(a), \qquad \text{(II, 1; 27)}$$

где $D\varphi$ — производная от φ в данном направлении. Аналогия между математическими и физическими распределениями не подлежит доказательству; *математические распределения представляют собой точное математическое определение распределений, встречаемых в физике.*

Распределения, встречаемые в физике, наводят на мысль о новых математических распределениях. Например, распределение заряда по поверхности S с поверхностной плотностью ρ задается формулой

$$\langle T, \varphi\rangle = \iint_S \rho(x)\varphi(x)\,dS. \qquad \text{(II, 1; 28)}$$

(Это распределение не следует путать с распределением, задаваемым *объемной* плотностью f и отождествляемым с самой функцией f.)

Распределение диполей по поверхности S, ориентированных по нормали и имеющих поверхностную плотность момента ρ, задается формулой

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_S \int \rho(x) \frac{d\varphi}{dn} dS. \qquad \text{(II, 1; 29)}$$

Вслед за Дираком потребители квантовой физики вместо распределения δ используют „функцию Дирака", обладающую свойствами

$$\left. \begin{array}{l} \delta(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0, \\ \delta(0) = \infty, \\ \int\int_{R^n} \ldots \int \delta(x)\, dx = 1. \end{array} \right\} \qquad \text{(II, 1; 30)}$$

(Вообще часто распределение на пространстве R^n переменного x обозначают через $T(x)$ и условно записывают $\langle T, \varphi \rangle$ в виде

$$\int\int_{R^n} \ldots \int T(x)\, \varphi(x)\, dx.)$$

Подобные свойства противоречивы, и подобная функция не могла бы существовать, ибо если бы δ равнялась нулю почти всюду, то ее интеграл Лебега был бы равен нулю. К тому же функция $k\delta(x)$ принимала бы те же самые значения 0 и ∞, что и δ, а ее интеграл (равный k) не был бы тем же самым. Разумеется, физики хорошо знают, что речь здесь идет не о „настоящей" функции, а о неком символическом орудии. И все же осторожней будет придерживаться понятия „распределение" и писать $\langle \delta, \varphi \rangle$, а не $\delta(x)$, если только речь не идет о интуитивном отыскании формул, которые затем должны быть строго доказаны в терминах распределений.

Точно так же распределение $\delta_{(a)}$ часто записывают как $\delta(x - a)$, и формула (II, 1; 23) приобретает вид

$$\int\int_{R^n} \ldots \int \delta(x - a)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(a). \qquad \text{(II, 1; 31)}$$

3. Носитель распределения. Говорят, что распределение T равно нулю на открытом множестве Ω в R^n, если $\langle T, \varphi \rangle = 0$ для всякой функции $\varphi \in \mathscr{D}$, носитель которой лежит в Ω.

Принцип склеивания по кускам

Мы примем без доказательства следующий принцип. *Пусть $\{\Omega_i\}$ — конечное или бесконечное семейство открытых множеств с объединением Ω. Пусть, с другой стороны, $\{T_i\}$ — семейство распределений, зависящих от того же множества индексов. Распределение T_i определено в от-*

крытом множестве Ω_i[1]). *Предположим, что если* Ω_i *и* Ω_j *имеют непустое пересечение, то* T_i *и* T_j *совпадают на этом пересечении. Тогда существует одно и только одно распределение* T, *определенное в* Ω, *которое совпадает с* T_i *на каждом открытом множестве* Ω_i.

Применяя этот принцип к случаю, когда все T_i равны нулю, мы видим, что если распределение равно нулю на семействе открытых множеств, то оно равно нулю на их объединении. Следовательно, объединение всех открытых множеств, на которых данное распределение T равно нулю, снова является открытым множеством, на котором T равно нулю, и притом самым большим. Дополнение этого множества и называется носителем T. Можно также сказать, что носитель T — это наименьшее замкнутое множество, вне которого T равно нулю. Для того чтобы некоторая точка принадлежала носителю T, необходимо и достаточно, чтобы T не равнялось нулю ни в какой окрестности этой точки.

Примеры. Если T — непрерывная функция, то носитель T как распределения совпадает с носителем T как функции. Носитель распределения Дирака $\delta_{(a)}$ в точке a сводится к единственной точке a.

Замечание. Если носитель T и носитель φ не имеют общих точек, то $\langle T, \varphi\rangle = 0$.

§ 2. Дифференцирование распределений

1. Определение. Мы хотим отыскать такое определение производной $\frac{\partial T}{\partial x_1}$ по переменному x_1 распределения T на R^n, которое бы в случае, когда T есть непрерывная функция f с непрерывными производными, приводило бы к $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ в обычном смысле.

Так, пусть f — непрерывно дифференцируемая функция. Имеем

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi \right\rangle = \int\int_{R^n} \cdots \int \frac{\partial f}{\partial x_1} \varphi \, dx. \tag{II, 2; 1}$$

Теорема Фубини, примененная к легкому случаю непрерывных функций и ограниченной области интегрирования, дает нам

$$\int\int_{x_2, \ldots, x_n} \cdots \int dx_2 \ldots dx_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_1} \varphi \, dx_1. \tag{II, 2; 2}$$

[1]) Распределение на открытом множестве Ω — это линейная непрерывная форма на подпространстве пространства $\mathcal{D}$, состоящем из функций φ с носителями в Ω.

Проинтегрируем по частям внутренний однократный интеграл. Он превратится в

$$[f\varphi]_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} dx_1. \tag{II, 2; 3}$$

Проинтегрированный член пропадает, поскольку φ равно нулю вне некоторого ограниченного множества. Таким образом, остается интеграл

$$-\int\int\limits_{x_2, \ldots, x_n}\ldots\int dx_2 \ldots dx_n \int\limits_{-\infty}^{\infty} f \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} dx_1 =$$

$$= -\int\int\limits_{R^n}\ldots\int f \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} dx_1 = -\left\langle f, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right\rangle. \tag{II, 2; 4}$$

Окончательно

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi \right\rangle = -\left\langle f, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right\rangle, \tag{II, 2; 5}$$

и, значит, мы вынуждены *определить* производную $\frac{\partial T}{\partial x_1}$ распределения T формулой

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_1}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right\rangle. \tag{II, 2; 6}$$

Эта формула, разумеется, определяет $\frac{\partial T}{\partial x_1}$ как распределение; в самом деле, $\frac{\partial T}{\partial x_1}$ оказывается линейным функционалом от φ; если, кроме того, последовательность φ_j сходится к φ в $\mathcal{D}$ при $j \to \infty$, то, по самому определению этой сходимости, последовательность $\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_1}$ сходится в $\mathcal{D}$ к $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$, а поскольку T является распределением, числовая последовательность $\left\langle T, \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_1}\right\rangle$ сходится к $\left\langle T, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right\rangle$; это рассуждение показывает, что $\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_1}, \varphi_j\right\rangle$ стремится к $\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_1}, \varphi\right\rangle$ и, значит, $\frac{\partial T}{\partial x_1}$ является распределением. То же самое справедливо и для производных $\frac{\partial T}{\partial x_i}$. Найдем теперь производную второго порядка $\frac{\partial^2 T}{\partial x_i\, \partial x_j}$. Имеем

$$\left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_i\, \partial x_j}, \varphi \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\, \partial x_i}\right\rangle,$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_j\, \partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\, \partial x_j}\right\rangle. \tag{II, 2; 7}$$

Как известно, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i}$; поскольку производные второго порядка функции φ непрерывны. Отсюда мы заключаем, что

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_i}. \tag{II, 2; 8}$$

Пусть, в общем случае, $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ — система n целых чисел $\geqslant 0$. Под D^p понимают производную

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{p_2} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{p_n}.$$

Полагают $|p| = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ — порядок производной. Тогда имеет место формула

$$\langle D^p T, \varphi \rangle = (-1)^{|p|} \langle T, D^p \varphi \rangle. \tag{II, 2; 9}$$

Итак,

Предложение 3. *Всякое распределение T имеет последовательные производные всех порядков, последовательность дифференцирований можно менять. Имеет место формула*

$$\langle D^p T, \varphi \rangle = (-1)^{|p|} \langle T, D^p \varphi \rangle,$$
$$D^p = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{p_i}, \quad |p| = \sum_{i=1}^{n} p_i. \tag{II, 2; 9}$$

Замечание. В частности, всякая непрерывная или хотя бы только локально суммируемая функция f имеет последовательные производные всех порядков; однако эти производные, вообще говоря, не являются функциями. Распределения по отношению к функциям напоминают в некотором смысле комплексные числа по отношению к вещественным; всякое алгебраическое уравнение с вещественными или комплексными коэффициентами имеет комплексные корни, всякая локально суммируемая функция или всякое распределение имеет последовательные производные всех порядков, которые являются распределениями.

Обобщение

Пусть D — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами

$$D = \sum_p A_p D^p. \tag{II, 2; 10}$$

Транспонированным (иногда говорят сопряженным) дифференциальным оператором называют оператор ${}^tD$, определяемый равенством

$${}^tD = \sum_p (-1)^{|p|} A_p D^p. \tag{II, 2; 11}$$

Тогда имеет место формула

$$\langle DT, \varphi\rangle = \langle T, {}^tD\varphi\rangle. \tag{II, 2; 12}$$

Имеем ${}^{tt}D = D$ и

$$\langle {}^tDT, \varphi\rangle = \langle T, D\varphi\rangle. \tag{II, 2; 13}$$

Например, если D — лапласиан $\Delta = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, то

$$\langle \Delta T, \varphi\rangle = \langle T, \Delta\varphi\rangle. \tag{II, 2; 14}$$

2. Примеры производных в случае одного измерения, $n = 1$. Если f — непрерывно дифференцируемая функция, то, согласно формуле (II, 2; 5), ее производная в смысле теории распределений совпадает с ее обычной производной.

Разрывные функции

Примем за T функцию Хевисайда Y, равную 0 при $x < 0$ и $+1$ при $x > 0$ (нет необходимости определять ее ее при $x = 0$, так как эта точка является множеством меры нуль). Эта фундаментальная функция символического исчисления используется в теории электричества под названием „единичная ступенька". Имеем

$$\langle Y', \varphi\rangle = -\langle Y, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} Y(x)\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\int_0^{\infty} \varphi'(x)\,dx = -[\varphi(x)]_{x=0}^{x=\infty} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle. \tag{II, 2; 15}$$

Таким образом,

$$Y' = \delta. \tag{II, 2; 16}$$

Инженеры-электрики называют δ „единичным импульсом". **Мы видим, что** разрыв Y проявляется у ее производной в виде **точечной массы.**

Дальнейшие производные распределения δ:

$$\langle \delta', \varphi\rangle = -\langle \delta, \varphi'\rangle = -\varphi'(0); \tag{II, 2; 17}$$

δ' — это диполь с моментом -1, помещенный в начало координат[1]). Далее

$$\langle \delta^{(m)}, \varphi\rangle = (-1)^m \varphi^{(m)}(0). \tag{II, 2; 18}$$

Обобщим это. Пусть f — бесконечно дифференцируемая функция (в обычном смысле теории функций) при $x < 0$ и при $x > 0$, и пусть каждая из ее

[1]) По аналогии с „единичным импульсом" для δ' можно употреблять термин „единичное биение". — *Прим. перев.*

производных имеет предел справа и предел слева в точке $x = 0$. Обозначим через σ_m „скачок“ m-й производной в точке $x = 0$, т. е. разность „предел справа минус предел слева“ [1]). Обозначим через f', f'', ... производные функции f в смысле теории распределений, а через $\{f'\}$, $\{f''\}$, ... — распределения, определяемые функциями, которые равны обычным производным при $x < 0$ и при $x > 0$ и не определены при $x = 0$. (Например, если $f = Y$, то $f' = \delta$, а $\{f'\} = 0$.)

Имеем

$$\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{0} - \int_{0}^{\infty}, \qquad \text{(II, 2; 19)}$$

$$-\int_{0}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -[f(x)\varphi(x)]_{x=0}^{x=+\infty} + \int_{0}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx =$$

$$= f(+0)\varphi(0) + \int_{0}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx. \qquad \text{(II, 2; 20)}$$

Аналогично

$$-\int_{-\infty}^{0} f(x)\varphi'(x)\,dx = -f(-0)\varphi(0) + \int_{-\infty}^{0} f'(x)\varphi(x)\,dx. \qquad \text{(II, 2; 21)}$$

Складывая, получим

$$-\langle f, \varphi'\rangle = \sigma_0\varphi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx, \qquad \text{(II, 2; 22)}$$

т. е.

$$f' = \{f'\} + \sigma_0\delta. \qquad \text{(II, 2; 23)}$$

Здесь снова разрыв f проявился у ее производной в виде точечной массы. Повторные дифференцирования приводят к предложению.

Предложение 4. *Имеют место формулы*

$$\left.\begin{aligned} f' &= \{f'\} + \sigma_0\delta, \\ f'' &= \{f''\} + \sigma_0\delta' + \sigma_1\delta, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(m)} &= \{f^{(m)}\} + \sigma_0\delta^{(m-1)} + \sigma_1\delta^{(m-2)} + \dots + \sigma_{m-1}\delta. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II, 2; 24)}$$

---

[1]) Удобен символ скачка $\int f(x) = f(x+0) - f(x-0)$; $\sigma_m = \int f^{(m)}(0)$. — *Прим. перев.*

Например, функция, равная 0 при $x<0$ и равная $\cos x$ (или $\sin x$) при $x>0$, имеет в качестве производной функцию, равную 0 при $x<0$ и равную $-\sin x$ (или $\cos x$) при $x>0$, с добавленным к ней распределением δ (или 0). В записи

$$\left.\begin{aligned}(Y(x)\cos x)' &= -Y(x)\sin x+\delta,\\ (Y(x)\sin x)' &= Y(x)\cos x.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(II, 2; 25)}$$

Распределение $\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$. Функция $\frac{1}{x}$ не определяет распределения, ибо она не суммируема в окрестности точки $x=0$. Но, как известно, интеграл

$$\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \qquad \text{(II, 2; 26)}$$

имеет смысл, если $\varphi\in\mathscr{D}$ (и даже если φ имеет ограниченный носитель и хотя бы один раз дифференцируема в начале координат); символ vp следует читать как „главное значение по Коши“ [1]). Этот интеграл определяет, таким образом, линейную форму от φ. Эта форма непрерывна. В самом деле, предположим, что последовательность φ_j сходится к φ в $\mathscr{D}$ при $j\to\infty$. Рассматривая разности $\varphi_j-\varphi$, можно всегда предполагать, что $\varphi=0$. Пусть $(-A,\ A)$ — интервал, содержащий носители всех φ_j. Имеем

$$\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_j(x)}{x}\,dx=\varphi_j(0)\,\mathrm{vp}\int_{-A}^{A}\frac{dx}{x}+\mathrm{vp}\int_{-A}^{A}\frac{\varphi_j(x)-\varphi_j(0)}{x}\,dx. \qquad \text{(II, 2; 27)}$$

Первое слагаемое равно нулю, ибо $\mathrm{vp}\int_{-A}^{A}\frac{dx}{x}=0$ $\left(\text{поскольку функция } \frac{1}{x} \text{ нечетна}\right)$. Во втором слагаемом можно опустить символ vp, поскольку подинтегральная функция суммируема в окрестности начала координат. Формула конечных приращений дает

$$\left|\frac{\varphi_j(x)-\varphi_j(0)}{x}\right|\leqslant\max|\varphi_j'| \qquad \text{(II, 2; 28)}$$

и

$$\left|\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_j(x)}{x}\,dx\right|\leqslant 2A\max|\varphi_j'|, \qquad \text{(II, 2; 29)}$$

---

[1]) Глава I, Дополнительные сведения об интегрировании, стр. 48.

что стремится к 0 при $j \to \infty$ в силу определения сходимости φ_j к 0 в $\mathcal{D}$. Распределение, определенное таким способом, обозначается $\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$. Имеем

$$\left\langle \mathrm{vp}\,\frac{1}{x},\ \varphi \right\rangle = \mathrm{vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx. \qquad \text{(II, 2; 30)}$$

В квантовой механике постоянно используются два распределения:

$$\left.\begin{aligned} \delta^+ &= \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2i\pi}\,\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}, \\ \delta^- &= \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2i\pi}\,\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}, \end{aligned}\right\} \ \delta = \delta^+ + \delta^-. \qquad \text{(II, 2; 31)}$$

Заметим, наконец, что функция $\lg|x|$, будучи локально суммируемой, задает распределение. При этом

$$\langle (\lg|x|)', \varphi\rangle = -\langle \lg|x|, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \lg|x|\,\varphi'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{0} - \int_{0}^{\infty}. \qquad \text{(II, 2; 32)}$$

$$-\int_{0}^{\infty} \lg x\,\varphi'(x)\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty} \lg x\,\varphi'(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[(-\lg x\,\varphi(x))_{\varepsilon}^{\infty} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[(\lg\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \right]. \qquad \text{(II, 2; 33)}$$

Но $(\lg\varepsilon)(\varphi(\varepsilon) - \varphi(0))$ стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$, ибо

$$|\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)| \leqslant \varepsilon \max|\varphi'|,$$

а $\varepsilon \lg \varepsilon \to 0$. Заменяя поэтому $(\lg\varepsilon)\varphi(\varepsilon)$ на

$$(\lg\varepsilon)\,\varphi(0) + (\lg\varepsilon)(\varphi(\varepsilon) - \varphi(0))$$

и затем на $(\lg\varepsilon)\,\varphi(0)$, получим окончательно

$$-\int_{0}^{\infty} \lg|x|\,\varphi'(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[(\lg\varepsilon)\,\varphi(0) + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \right]. \qquad \text{(II, 2; 34)}$$

Аналогично

$$-\int_{-\infty}^{0} \lg|x|\varphi'(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-(\lg\varepsilon)\varphi(0) + \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right]. \quad \text{(II, 2; 35)}$$

Складывая, получим

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \lg|x|\varphi'(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right] = \mathrm{vp}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx, \quad \text{(II, 2; 36)}$$

откуда окончательно

$$(\lg|x|)' = \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}. \quad \text{(II, 2; 37)}$$

3. Примеры производных в случае многих переменных; *n* произвольно. Пусть функция f бесконечно дифференцируема в области, дополнительной к регулярной гиперповерхности (S). Пусть каждая частная производная функции f имеет предел в каждой точке гиперповерхности (S) при подходе к (S) с любой стороны. Разность между этими пределами будет скачком соответствующей частной производной, который определен только при задании определенного направления „прохода“ через (S) и который меняет знак при изменении направления этого „прохода“; этот скачок является функцией, определенной на поверхности (S). Как и при $n=1$, обозначим через $D^p f$ производную функции f в смысле теории распределений, а через $\{D^p f\}$ — распределение, задаваемое обычной производной, которая определена при $x \notin (S)$ и не определена при $x \in (S)$ [(S) — поверхность, т. е. множество меры нуль]. Имеем

$$\left\langle\frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi\right\rangle = -\left\langle f, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right\rangle = -\int\int_{R^n}\cdots\int f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,dx =$$

$$= -\int_{x_2,\ldots,x_n}\cdots\int dx_2\ldots dx_n\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,dx_1. \quad \text{(II, 2; 38)}$$

Используя (II, 2; 32), получаем

$$\int_{x_2,\ldots,x_n}\cdots\int dx_2\ldots dx_n\left[\sigma_0\varphi + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_1}\varphi\,dx_1\right], \quad \text{(II, 2; 39)}$$

где σ_0 — скачок функции f при пересечении поверхности (S) в направлении оси x_1, взятый в точке пересечения поверхности (S) с параллелью оси x_1,

имеющей координаты $x_2, \ldots, x_n$. В произведении $\sigma_0\varphi$ функцию φ надо брать в той же самой точке.

Далее,

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi \right\rangle = \int_{(S)} \cdots \int \sigma_0 \varphi \, dx_2 \ldots dx_n + \int \int_{R^n} \cdots \int \frac{\partial f}{\partial x_1} \varphi \, dx. \quad (II, 2; 40)$$

Поверхностный интеграл можно заменить интегралом

$$\int_{(S)} \cdots \int \sigma_0 \varphi \cos \theta_1 \, dS, \quad (II, 2; 41)$$

где θ_1 — угол, образуемый осью x_1 с нормалью к (S), направленной в сторону соответствующего „прохода" через (S), т. е. в сторону возрастания x_1. В этой форме интеграл, очевидно, не зависит от направления „прохода", ибо если направление „прохода" меняется, то $\cos \theta_1$ и σ_0 меняют знак; нужно лишь, чтобы направление „прохода" было одним и тем же как для скачка функции f, так и для ориентации нормали. Распределение

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{(S)} \cdots \int \sigma_0 \varphi \cos \theta_1 \, dS \quad (II, 2; 42)$$

соответствует массам, распределенным по поверхности (S) с поверхностной плотностью $\sigma_0 \cos \theta_1$. Символически это распределение можно обозначить $(\sigma_0 \cos \theta_1) \delta_{(S)}$. Тогда для любой производной $\frac{\partial}{\partial x_i}$ имеем формулу

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + (\sigma_0 \cos \theta_i) \delta_{(S)}, \quad (II, 2; 43)$$

которая обобщает формулу (II, 2; 23). Продифференцируем еще раз:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} [(\sigma_0 \cos \theta_i) \delta_{(S)}] + \sigma_i \cos \theta_i \delta_{(S)}, \quad (II, 2; 44)$$

где σ_i — скачок $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ при прохождении через (S). Отсюда получается формула для $\Delta f = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$, которую мы хотим преобразовать.

a) Сумма $\sum_i \sigma_i \cos \theta_i$ равна скачку σ_ν нормальной производной $\frac{\partial f}{\partial \nu} = \sum_i \cos \theta_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Скачок нормальной производной не зависит от ориентации

нормали; изменить эту ориентацию — значит изменить знак как при вычислении скачка, так и у самой нормальной производной и значит оставить неизменным скачок нормальной производной. Можно непосредственно определить

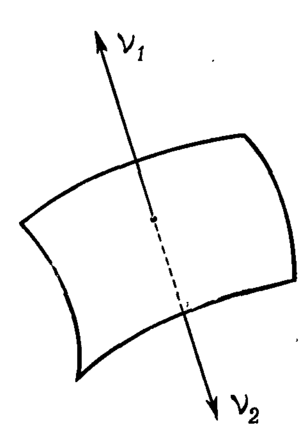


Рис. II, 1.

этот скачок, не рассматривая направления „прохода", так как скачок равен $\left\{\frac{\partial f}{\partial \nu_1}\right\}+\left\{\frac{\partial f}{\partial \nu_2}\right\}$ — сумме нормальных производных с обеих сторон (S).

b) Имеет место формула

$$\left\langle \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma_0 \cos \theta_i \delta_{(S)}),\ \varphi \right\rangle =$$

$$= -\int_S \ldots \int \sum_i \cos \theta_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \sigma_0\, dx = -\int_S \ldots \int \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \sigma_0\, dS. \quad \text{(II, 2; 45)}$$

Это выражение не зависит от выбора направления нормали; изменить это направление — значит изменить одновременно знак σ_0 и знак $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$. Соответствующее распределение образовано диполями, ориентированными по нормали $\vec{\nu}$, с поверхностной плотностью момента, равной $-\sigma_0$. Это распределение можно обозначить $\frac{\partial}{\partial \nu}(\sigma_0 \delta_{(S)})$ или

$$\frac{\partial}{\partial \nu_1}(f_1 \delta_{(S)}) + \frac{\partial}{\partial \nu_2}(f_2 \delta_{(S)});$$

последнее выражение не требует никакого выбора направления „прохода". Формула, которая обобщает вторую из формул (II, 2; 24), окончательно имеет вид

$$\Delta f = \{\Delta f\} + \left(\left\{\frac{\partial f}{\partial \nu_1}\right\} + \left\{\frac{\partial f}{\partial \nu_2}\right\}\right)\delta_{(S)} + \frac{\partial}{\partial \nu_1}(f_1\delta_{(S)}) + \frac{\partial}{\partial \nu_2}(f_2\delta_{(S)}) =$$
$$= \{\Delta f\} + \sigma_\nu \delta_{(S)} + \frac{\partial}{\partial \nu}(\sigma_0\delta_{(S)}). \quad \text{(II, 2; 46)}$$

Частный случай: формула Грина Предположим, что поверхность (S) ограничивает объем (V) и что f равна нулю вне (V). Формула (II, 2; 46) запишется тогда в виде

$$\langle \Delta f, \varphi\rangle = \langle f, \Delta\varphi\rangle = \int\int\underset{V}{\cdots}\int f\Delta\varphi\, dx =$$
$$= \langle\{\Delta f\}, \varphi\rangle + \left\langle\frac{\partial f}{\partial \nu_i}\delta_{(S)}, \varphi\right\rangle + \left\langle\frac{\partial}{\partial \nu_i}(f\delta_{(S)}), \varphi\right\rangle =$$
$$= \int\int\underset{V}{\cdots}\int \Delta f\varphi\, dx + \int\underset{S}{\cdots}\int \frac{\partial f}{\partial \nu_i}\varphi\, dS - \int\underset{S}{\cdots}\int f\frac{\partial \varphi}{\partial \nu_i}dS, \quad \text{(II, 2; 47)}$$

откуда вытекает предложение:

Предложение 5 (формула Грина).

$$\int\int\underset{V}{\cdots}\int (f\Delta\varphi - \varphi\Delta f)\, dx + \int\underset{S}{\cdots}\int\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial \nu_i} - \varphi\frac{\partial f}{\partial \nu_i}\right)dS = 0, \quad \text{(II, 2; 48)}$$

где ν_i — внутренняя нормаль.

Можно было бы и обратно вывести формулу (II, 2; 46) из формулы Грина (II, 2; 48).

Лапласиан функции $\frac{1}{r^{n-2}}$, $r = \sqrt{\sum_i x_i^2}$, в R^n Функция $1/r^{n-2}$ гармонична в области, дополнительной к началу координат. В самом деле, для функции f, зависящей только от r, имеем (в смысле теории функций)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{df}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{df}{dr}\cdot\frac{x_i}{r},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{d^2 f}{dr^2}\cdot\left(\frac{x_i}{r}\right)^2 + \frac{df}{dr}\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right), \quad \text{(II, 2; 49)}$$
$$\Delta f = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{df}{dr}. \quad \text{(II, 2; 50)}$$

Таким образом, гармоническая, т. е. удовлетворяющая уравнению $\Delta f=0$, функция от r удовлетворяет дифференциальному уравнению типа **Эйлера**:

$$\Delta f=\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{n-1}{r}\frac{df}{dr}=0, \qquad \text{(II, 2; 51)}$$

которое имеет решением

$$f=\begin{cases}\dfrac{A}{r^{n-2}}+B & \text{при} \quad n\neq 2,\\[2mm] A\lg\dfrac{1}{r}+B & \text{при} \quad n=2,\end{cases} \qquad \text{(II, 2; 52)}$$

где A и B — постоянные.

Константа является гармонической функцией всюду, но функции $1/r^{n-2}$ (при $n\neq 2$) и $\lg(1/r)$ (при $n=2$) имеют особенность в начале координат. Они к тому же суммируемы в окрестности начала координат (ибо $n-2<n$) и, значит, определяют некоторые распределения. Мы хотим отыскать лапласиан такого распределения. Мы должны ожидать, что получим распределение, сконцентрированное в начале координат.

Первый метод Имеем $\left\langle\Delta\frac{1}{r^{n-2}},\ \varphi\right\rangle=\left\langle\frac{1}{r^{n-2}},\ \Delta\varphi\right\rangle=$

$$=\int\int\limits_{R^n}\cdots\int\frac{1}{r^{n-2}}\Delta\varphi\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\int\limits_{r\geqslant\varepsilon}\cdots\int\frac{1}{r^{n-2}}\Delta\varphi\,dx. \qquad \text{(II, 2; 53)}$$

Интеграл $\int\int\limits_{r\geqslant\varepsilon}\cdots\int\frac{1}{r^{n-2}}\Delta\varphi\,dx$ можно вычислить по формуле Грина (II, 2; 48) для объема V_ε, определяемого неравенством $r\geqslant\varepsilon$ и ограниченного сферой (S_ε): $r=\varepsilon$; или, что сводится к тому же, можно заметить, что этот интеграл равен $\langle\rho_\varepsilon,\ \Delta\varphi\rangle=\langle\Delta\rho_\varepsilon,\ \varphi\rangle$, где ρ_ε — функция, равная 0 при $r<\varepsilon$ и равная $1/r^{n-2}$ при $r>\varepsilon$, и применить формулу (II, 2; 46) к поверхности $r=\varepsilon$, на которой функция ρ_ε имеет скачок. Пусть направление „прохода“ и направление нормали выбраны внутрь области, тогда $\frac{\partial}{\partial\nu_i}=\frac{\partial}{\partial r}$. Учитывая, что

$$\left\{\Delta\frac{1}{r^{n-2}}\right\}=0,$$

получаем

$$\int\int\limits_{r\geqslant\varepsilon}\cdots\int\frac{1}{r^{n-2}}\Delta\varphi\,dx=$$

$$=-\int\limits_{r=\varepsilon}\cdots\int\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\frac{\partial\varphi}{\partial r}dS+\int\limits_{r=\varepsilon}\cdots\int\frac{-(n-2)}{\varepsilon^{n-1}}\varphi\,dS. \qquad \text{(II, 2; 54)}$$

Когда $\varepsilon \to 0$, производная $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \sum_i \frac{x_i}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ остается ограниченной, площадь поверхности интегрирования равна $S_n \varepsilon^{n-1}$, где S_n — площадь единичной сферы в R^n, и, значит, первый поверхностный интеграл в правой части формулы (II, 2; 54) имеет порядок ε, т. е. стремится к 0 вместе с ε. Второй интеграл можно записать в виде

$$\int \cdots \int_{r=\varepsilon} \frac{-(n-2)}{\varepsilon^{n-1}} \varphi(0)\, dS + \int \cdots \int_{r=\varepsilon} \frac{-(n-2)}{\varepsilon^{n-1}} (\varphi(x) - \varphi(0))\, dS. \quad \text{(II, 2; 55)}$$

Первый интеграл в формуле (II, 2;55) равен $-(n-2)\varphi(0) S_n$. Второй же стремится к 0 вместе с ε, поскольку разность

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| \leqslant |x| \sqrt{n} \max_{\substack{|x| \leqslant \varepsilon \\ i=1,2,\ldots,n}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| = \varepsilon \sqrt{n} \max \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|$$

имеет порядок ε и весь интеграл также имеет порядок $\frac{\varepsilon \cdot \varepsilon^{n-1}}{\varepsilon^{n-1}} = \varepsilon$. Окончательно

$$\left\langle \Delta \frac{1}{r^{n-2}},\ \varphi \right\rangle = -(n-2) S_n \varphi(0) \quad \text{(II, 2; 56)}$$

или

$$\Delta \frac{1}{r^{n-2}} = -(n-2) S_n \delta = -(n-2) \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \delta. \quad \text{(II, 2; 57)}$$

Второй метод

Обозначим через $\overline{\psi}(r)$ среднее функции ψ по сфере радиуса r. Используя прием вычисления кратного интеграла посредством интегрирования по поверхности сферы радиуса r и последующего интегрирования по r [1]) и учитывая, что

$$\int \cdots \int_{|x|=r} \psi(x)\, dS = S_n r^{n-1} \overline{\psi}(r),$$

будем иметь

$$\left\langle \Delta \frac{1}{r^{n-2}},\ \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{1}{r^{n-2}},\ \Delta\varphi \right\rangle =$$

$$= \int \int \cdots \int_{R^n} \frac{1}{r^{n-2}} \Delta\varphi\, dx = S_n \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{r^{n-2}} \overline{\Delta\varphi}(r)\, dr. \quad \text{(II, 2; 58)}$$

[1]) Глава I, предложение 31.

Известно, что лапласиан инвариантен при вращениях вокруг начала координат. Отсюда можно вывести (мы это примем без доказательства), что

$$\overline{\Delta\varphi} = \Delta\overline{\varphi} = \frac{d^2}{dr^2}\overline{\varphi}(r) + \frac{n-1}{r}\frac{d}{dr}\overline{\varphi}(r). \qquad \text{(II, 2; 59)}$$

Тогда правая часть формулы (II, 2; 58) принимает вид

$$S_n\int_0^\infty r\left(\overline{\varphi}'' + \frac{n-1}{r}\overline{\varphi}'\right)dr = S_n\int_0^\infty [(r\overline{\varphi}')' + (n-2)\overline{\varphi}']\,dr =$$

$$= S_n[r\overline{\varphi}' + (n-2)\overline{\varphi}]_0^\infty = -(n-2)S_n\overline{\varphi}(0) =$$

$$= -(n-2)S_n\varphi(0), \qquad \text{(II, 2; 60)}$$

что совпадает с (II, 2; 56). Отсюда мы снова получаем (II, 2; 57).

При $n=2$ функция $\frac{1}{r^{n-2}} = 1$ и имеет лапласиан, равный нулю; в этом случае именно $\lg(1/r)$ имеет лапласиан, сосредоточенный в начале координат; этот лапласиан может быть вычислен аналогичным образом. Резюмируем.

Предложение 6. $\Delta\frac{1}{r^{n-2}} = -(n-2)S_n\delta$ *при целых положительных n, отличных от* 2; $\Delta\lg\frac{1}{r} = -2\pi\delta$ *при* $n=2$.

Частные случаи:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta|x| = 2\delta, && n=1,\\ &\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta, && n=3. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II, 2; 61)}$$

В дальнейшем мы рассмотрим приложения этих формул к теории ньютоновского потенциала. Известно, что потенциал распределения зарядов с плотностью f удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta U = -4\pi f$, если плотность f достаточно регулярна. Если вместо распределения зарядов с плотностью f мы возьмем единичный заряд $+1$, помещенный в начало координат, т. е. если мы возьмем распределение δ, то его потенциал U будет равен $\frac{1}{r}$; этот потенциал также удовлетворяет уравнению Пуассона (II, 2; 61). На самом же деле уравнение Пуассона в общем случае мы получаем именно из уравнения Пуассона для элементарного заряда.

§ 3. Умножение распределений

Перемножить два произвольных распределения S и T нельзя. Так, например, пусть f — локально суммируемая функция; она определяет некоторое распределение; но f^2 не имеет оснований также быть локально суммируемой $\left(\text{пример: при } n=1,\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{|x|}},\ f^2(x)=\frac{1}{|x|}\right)$ и, значит, не определяет никакого распределения. Чем „иррегулярней" T, тем „регулярней" должно быть S, для того чтобы произведение ST имело смысл. Мы ограничимся определением произведения, когда одно из двух распределений произвольно, а другое является бесконечно дифференцируемой в обычном смысле функцией.

Итак, пусть α такая функция; определим αT, где $T \in \mathcal{D}'$. Предположим сначала, что $T = f$ — локально суммируемая функция. Мы хотим, чтобы в этом случае αf было обычным произведением:

$$\langle \alpha f, \varphi\rangle = \int\int_{R^n} \cdots \int (\alpha(x) f(x))\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int\int_{R^n} \cdots \int f(x)(\alpha(x)\varphi(x))\,dx = \langle f, \alpha\varphi\rangle. \qquad \text{(II, 3; 1)}$$

Итак, мы пришли к тому, чтобы определить произведение αT при произвольном T предложением:

Предложение 7. *Пусть T — произвольное распределение, α — бесконечно дифференцируемая в обычном смысле функция, тогда существует произведение αT, определяемое формулой*

$$\langle \alpha T, \varphi\rangle = \langle T, \alpha\varphi\rangle. \qquad \text{(II, 3; 2)}$$

Эта формула определяет αT как некоторое новое распределение. Правая часть на самом деле вполне определена (ибо функция $\alpha\varphi$ бесконечно дифференцируема в силу формулы Лейбница для высших производных произведения, а ее носитель содержится в носителе φ и, значит, ограничен). Правая часть зависит от φ линейно. Наконец, если функции φ_j сходятся к 0 в $\mathcal{D}$ при $j \to \infty$, то их носители остаются в фиксированном ограниченном множестве, и, значит, то же самое справедливо для $\alpha\varphi_j$, а каждая из производных функций φ_j сходится равномерно к 0, и, значит, в силу формулы Лейбница, то же самое верно для каждой из производных функций $\alpha\varphi_j$. Мы видим, почему существенно, чтобы α была бесконечно дифференцируемой в обычном смысле. И все же пусть T — распределение „порядка $\leqslant m$", т. е. распределение, продолжимое до линейного функционала, непрерывного на

пространстве $\mathscr{D}^m$ m раз непрерывно дифференцируемых функций с ограниченными носителями. (Пространство $\mathscr{D}^m$ снабжается топологией, аналогичной топологии $\mathscr{D}$, но использующей только равномерную сходимость всех производных порядка $\leqslant m$ функций φ_j.) В этом случае можно определить αT, если α является функцией, только m раз непрерывно дифференцируемой в обычном смысле.

Примеры:

$$\langle \alpha\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \alpha\varphi \rangle = \alpha(0)\varphi(0) = \langle \alpha(0)\delta, \varphi \rangle, \tag{II, 3; 3}$$

откуда

$$\alpha\delta = \alpha(0)\delta. \tag{II, 3; 4}$$

Всякое произведение, в которое входит δ, пропорционально δ. (Заметим, что δ есть распределение „порядка 0“ и $\alpha\delta$ определено, коль скоро функция α непрерывна в начале координат.) В частности, при $n = 1$

$$x\delta = 0. \tag{II, 3; 5}$$

На прямой ($n = 1$) имеем

$$\langle \alpha\delta', \varphi \rangle = \langle \delta', \alpha\varphi \rangle = -(\alpha\varphi)'_{x=0} =$$
$$= -\alpha(0)\varphi'(0) - \alpha'(0)\varphi(0) = \langle \alpha(0)\delta' - \alpha'(0)\delta, \varphi \rangle, \tag{II, 3; 6}$$

откуда

$$\alpha\delta' = \alpha(0)\delta' - \alpha'(0)\delta. \tag{II, 3; 7}$$

В частности,

$$x\delta' = -\delta, \quad x^2\delta' = 0. \tag{II, 3; 8}$$

Вообще

$$x\delta^{(m)} = -m\delta^{(m-1)}. \tag{II, 3; 9}$$

Имеет место следующий важный результат.

Предложение 8. *Для того чтобы распределение T на прямой R ($n = 1$) удовлетворяло соотношению*

$$xT = 0, \tag{II, 3; 10}$$

необходимо и достаточно, чтобы T было пропорционально δ:

$$T = C\delta. \tag{II, 3; 11}$$

[Иначе говоря, распределение δ с точностью до постоянного множителя является единственным собственным вектором оператора умножения на x, соответствующим собственному значению $\lambda = 0$. Для произвольного вещественного собственного значения λ таким вектором будет $\delta(x-\lambda)$.] Мы

только что видели, что $x\delta = 0$. Доказывать нужно обратное. Пусть T удовлетворяет соотношению (II, 3; 10); имеем

$$\langle xT, \varphi \rangle = \langle T, x\varphi \rangle = 0. \qquad \text{(II, 3; 12)}$$

Таким образом, T равно нулю на всякой функции $\chi \in \mathscr{D}$, имеющей вид $\chi = x\varphi$, $\varphi \in \mathscr{D}$. Но для того, чтобы функция χ из $\mathscr{D}$ имела вид $x\varphi$, необходимо и достаточно, чтобы χ обращалась в нуль в начале координат: $\chi(0) = 0$. [Это, очевидно, необходимо; это достаточно, ибо если $\chi(0) = 0$, то функция $\varphi(x) = \frac{\chi(x)}{x}$ будет бесконечно дифференцируемой (в точках, отличных от $x = 0$, это очевидно, а формула Тейлора, примененная к функции χ, показывает, что это справедливо всюду).] Пусть теперь θ — фиксированная функция из $\mathscr{D}$, такая, что $\theta(0) = 1$. Для любой $\psi \in \mathscr{D}$ имеем

$$\begin{gathered} \psi = \lambda\theta + \chi, \\ \lambda = \psi(0), \quad \chi(0) = 0. \end{gathered} \qquad \text{(II, 3; 13)}$$

Отсюда получаем $T(\chi) = 0$ и, значит,

$$T(\psi) = \lambda T(\theta) = C\psi(0), \qquad \text{(II, 3; 14)}$$

где $C = T(\theta)$, что дает $T = C\delta$.

Ч. и т. д.

Замечание. То же самое предложение будет справедливо, если заменить x произвольной бесконечно дифференцируемой функцией α, имеющей в начале координат единственный нуль и притом порядка 1. Ибо в этом случае функция $\frac{x}{\alpha}$ будет бесконечно дифференцируемой, а из $\alpha T = 0$ вытекает, что $xT = \frac{x}{\alpha}\alpha T = 0$ (и наоборот).

Предложение 9. *Имеет место формула дифференцирования произведения*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha T) = \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} T + \alpha \frac{\partial T}{\partial x_i}. \qquad \text{(II, 3; 15)}$$

В самом деле,

$$\begin{gathered} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha T), \varphi \right\rangle = -\left\langle \alpha T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = -\left\langle T, \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle, \\ \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} T, \varphi \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \varphi \right\rangle, \\ \left\langle \alpha \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \alpha\varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha\varphi) \right\rangle. \end{gathered} \qquad \text{(II, 3; 16)}$$

Учитывая линейность T, достаточно показать, что

$$-\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \varphi - \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha\varphi), \qquad \text{(II, 3; 17)}$$

а это есть формула дифференцирования для $\alpha\varphi$, записанная несколько иначе, чем обычно.

§ 4. Топология в пространстве распределений. Сходимость распределений. Ряды из распределений

Говорят, что распределения T_j сходятся к распределению T при $j \to \infty$, если для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}$ комплексные числа $\langle T_j, \varphi \rangle$ стремятся к комплексному числу $\langle T, \varphi \rangle$ при $j \to \infty$. Введенная здесь сходимость является *простой сходимостью*[1], если рассматривать T и T_j как функционалы над $\mathcal{D}$.

Говорят, что ряд $\sum_{i \in I} T_i$ суммируем к сумме T, если для любой $\varphi \in \mathcal{D}$ числовой ряд $\sum_{i \in I} \langle T_i, \varphi \rangle$ суммируем к сумме $\langle T, \varphi \rangle$. То же самое определение дается для сходимости ряда, когда I является множеством N целых чисел $\geqslant 0$.

Предложение 10. *Пусть T_j — такая последовательность распределений, что когда $j \to \infty$ числовая последовательность $\langle T_j, \varphi \rangle$ при любой функции $\varphi \in \mathcal{D}$ имеет предел. Тогда последовательность T_j сходится в $\mathcal{D}'$ к некоторому пределу.*

Пусть $\sum_{i \in I} T_i$ — такой ряд из распределений, что для любой $\varphi \in \mathcal{D}$ числовой ряд $\sum_{i \in I} \langle T_i, \varphi \rangle$ суммируем. Тогда ряд $\sum_{i \in I} T_i$ суммируем в $\mathcal{D}'$.

Аналогичное утверждение справедливо для сходящихся рядов, когда $I = N$.

Эти различные утверждения, естественно, эквивалентны. Рассмотрим первое. Если последовательность $\langle T_j, \varphi \rangle$ имеет предел при $j \to \infty$, то этот предел можно обозначить $\langle T, \varphi \rangle$. Тем самым T определяется как функционал на $\mathcal{D}$. Этот функционал, очевидно, линеен. Если бы удалось доказать, что функционал T непрерывен, то функционал T был бы распределением, а поскольку T_j сходятся к T, теорема была бы доказана. Однако непрерывность T есть весьма специальное явление, связанное с линейностью функцио-

---

[1]) То есть не равномерной. — *Прим. перев.*

налов и со специфическими свойствами пространства $\mathscr{D}$. В действительности не является обычным, чтобы *простой* предел непрерывных функционалов был непрерывен. Непрерывность T мы примем без доказательства, которое достаточно деликатно.

Предложение 11. *Пусть функции f_j сходятся к предельной функции f при $j \to \infty$ в смысле простой сходимости почти всюду, и пусть f_j мажорируются по модулю независимо от j локально суммируемой функцией g. Тогда распределения f_j сходятся к распределению f.*

В самом деле, в силу теоремы Лебега о сходимости последовательности интегралов, интегралы $\int\int_{R^n} \dots \int f_j \varphi \, dx$ стремятся при $j \to \infty$ к интегралу $\int\int_{R^n} \dots \int f\varphi \, dx$.

Частный случай. *Если локально суммируемые функции f_j сходятся к пределу f при $j \to \infty$ равномерно на любом ограниченном множестве, то распределения f_j сходятся к распределению f.*

Предложение 12. *Дифференцирование есть линейная непрерывная операция в $\mathscr{D}'$. Если распределения T_j сходятся при $j \to \infty$ к распределению T, то производные T'_j сходятся к T'* [1]). *Всякий суммируемый или сходящийся ряд почленно дифференцируем под знаком $\sum$.*

Предположим, например, что T_j сходятся к T. Покажем, что T'_j сходятся к T'. Имеем $\langle T'_j, \varphi \rangle = -\langle T_j, \varphi' \rangle$. Поскольку T_j сходятся к T, это выражение стремится к $-\langle T, \varphi' \rangle = \langle T', \varphi \rangle$.

Итак, $\lim\limits_{j \to \infty} \langle T'_j, \varphi \rangle = \langle T', \varphi \rangle$, а, значит, $\lim\limits_{j \to \infty} T'_j = T'$.

Замечание. Напротив, известно, что если непрерывные и дифференцируемые в обычном смысле функции f_j равномерно сходятся к пределу f, то f не обязательно дифференцируема в обычном смысле, и даже если она дифференцируема, производные f'_j не обязательно сходятся к f' хотя бы в смысле простой сходимости. Однако f' всегда существует в смысле теории распределений и f'_j всегда сходятся к f' в $\mathscr{D}'$.

---

[1]) Здесь $'$ означает дифференцирование по какому-то из переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. — *Прим. перев.*

Предложение 13. *Пусть f_j — последовательность функций, неотрицательных при $|x| \quad k$, $k > 0$ — фиксировано. Пусть f_j сходятся к 0 при $j \to \infty$ равномерно на любом множестве вида $0 < a \leqslant |x| \leqslant \frac{1}{a} < \infty$, и пусть, наконец, интегралы $\int\int\limits_{|x| \leqslant a} \ldots \int f_j(x)\,dx$ стремятся к $+1$ при $j \to \infty$, каково бы ни было $a > 0$. Тогда распределения f_j сходятся к δ при $j \to \infty$.*

В самом деле, пусть $\varphi \in \mathscr{D}$. Имеем

$$\langle f_j, \varphi \rangle = \int\int\limits_{R^n} \ldots \int f_j(x)\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int\int\limits_{|x| \leqslant a} \ldots \int \varphi(0) f_j(x)\,dx + \int\int\limits_{|x| \leqslant a} \ldots \int (\varphi(x) - \varphi(0)) f_j(x)\,dx +$$

$$+ \int\int\limits_{|x| > a} \ldots \int \varphi(x) f_j(x)\,dx. \qquad \text{(II, 4; 1)}$$

Оценим сначала второй член справа:

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| \leqslant |x| \sqrt{n} \max_{i=1,2,\ldots,n} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|. \qquad \text{(II, 4; 2)}$$

Пусть M — максимум модуля первых производных функции φ. Второй интеграл оценивается величиной

$$a\sqrt{n}\, M \int\int\limits_{|x| \leqslant a} \ldots \int |f_j(x)|\,dx.$$

Выберем $a \leqslant k$, тогда предыдущий интеграл будет равен

$$\int\int\limits_{|x| \leqslant a} \ldots \int f_j(x)\,dx \leqslant \int\int\limits_{|x| \leqslant k} \ldots \int f_j(x)\,dx.$$

Поскольку интеграл $\int\int\limits_{|x| \leqslant k} \ldots \int f_j(x)\,dx$ стремится к 1 при $j \to \infty$, он ограничен некоторой постоянной K. Тогда второй интеграл в правой части равенства (II, 4; 1) будет мажорироваться константой $aKM\sqrt{n}$. Выберем $a \leqslant \frac{\varepsilon}{3KM\sqrt{n}}$, тогда второй интеграл в (II, 4; 1) не будет превосходить $\frac{\varepsilon}{3}$ при всех j.

Выберем теперь число a *раз и навсегда* так, чтобы оно удовлетворяло предыдущим условиям $\left(a \leqslant k,\ a \leqslant \frac{\varepsilon}{3KM\sqrt{n}}\right)$ и, кроме того, столь малым,

чтобы носитель φ содержался в шаре $|x| \leqslant \frac{1}{a}$. Тогда третий член в правой части равенства (II, 4; 1) будет стремиться к 0 при $j \to \infty$, поскольку f_j равномерно сходятся к 0 при $a < |x| \leqslant \frac{1}{a}$. Поэтому существует такое j_1, что при $j \geqslant j_1$ этот третий член будет мажорироваться числом $\frac{\varepsilon}{3}$.

Наконец, первый член равен $\varphi(0) \int\int\limits_{|x| \leqslant a} \ldots \int f_j(x)\,dx$. Поскольку интеграл $\int\int\limits_{|x| \leqslant a} \ldots \int f_j(x)\,dx$ стремится к 1 при $j \to \infty$, этот первый член стремится к $\varphi(0)$ при $j \to \infty$ и, значит, существует такое j_2, что при $j \geqslant j_2$ он отличается от $\varphi(0)$ самое большее на $\frac{\varepsilon}{3}$.

Пусть теперь $j_0 = \max(j_1, j_2)$, тогда при любом $j \geqslant j_0$ будем иметь $|\langle f_j, \varphi\rangle - \langle\delta, \varphi\rangle| \leqslant \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Замечание. Предположение $f_j \geqslant 0$ при $|x| \leqslant k$ не является необходимым, его можно заменить предположением: при подходящем фиксированном $k > 0$ интегралы $\int\int\limits_{|x| \leqslant k} \ldots \int |f_j(x)|\,dx$ ограничены при всех j некоторой постоянной K.

Примеры.

1) Функция

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| > \varepsilon, \\ \dfrac{n}{\varepsilon^n S_n} & \text{при } |x| < \varepsilon \end{cases} \tag{II, 4; 3}$$

стремится к распределению δ при $\varepsilon \to 0$. В самом деле, $f_\varepsilon \geqslant 0$ всюду; при $|x| \geqslant a$ функция f_ε равна нулю, коль скоро $\varepsilon < a$; наконец, если $\varepsilon \leqslant a$, то

$$\int\int\limits_{|x| \leqslant a} \ldots \int f_\varepsilon(x)\,dx = \int\int\limits_{|x| \leqslant \varepsilon} \ldots \int = \frac{n}{\varepsilon^n S_n} V_\varepsilon, \tag{II, 4; 4}$$

где V_ε — объем шара радиуса ε; этот объем в точности равен $\varepsilon^n S_n/n$, а значит, интеграл от f_ε равен все время 1.

2) Функция

$$f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^n (\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{r^2}{2\varepsilon^2}} \tag{II, 4; 5}$$

сходится к δ при $\varepsilon \to 0$.

Во-первых, $f_\varepsilon \geqslant 0$. Во-вторых, при $|x| \geqslant a$ эта функция мажорируется величиной $\frac{1}{\varepsilon^n (\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{a^2}{2\varepsilon^2}}$, которая стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$. Наконец, интеграл

$$\iint\limits_{|x| \leqslant a} \cdots \int \frac{1}{\varepsilon^n (\sqrt{2\pi})^n} \cdot e^{-\frac{r^2}{2\varepsilon^2}} dx = \iint\limits_{|x| \leqslant \frac{a}{\varepsilon}} \cdots \int \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{r^2}{2}} dx \qquad \text{(II, 4; 6)}$$

стремится при $\varepsilon \to 0$ к интегралу

$$\iint\limits_{R^n} \cdots \int \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{r^2}{2}} dx = 1. \qquad \text{(II, 4; 7)}$$

Заметим, что вместо предыдущей функции можно было бы взять функцию

$$\frac{1}{\varepsilon^n} e^{-\pi \frac{r^2}{\varepsilon^2}}, \qquad \text{(II, 4; 8)}$$

ибо

$$\iint\limits_{R^n} \cdots \int e^{-\pi r^2} dx = 1. \qquad \text{(II, 4; 9)}$$

Предложение 14. *Для того чтобы тригонометрический ряд* $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{2i\pi kx}$ $(n = 1)$ *был суммируем в* $\mathcal{D}'$, *достаточно, чтобы его коэффициенты мажорировались по модулю при* $k \to \infty$ *степенью* $A|k|^\alpha$ *индекса* $|k|$ *с подходящим* $\alpha \geqslant 0$.

Опустим сначала член a_0 и рассмотрим ряд

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{a_k}{(2i\pi k)^{\beta+2}} \cdot e^{2i\pi kx}, \qquad \text{(II, 4; 10)}$$

где β — целое $\geqslant \alpha$. Общий член этого ряда мажорируется по модулю величиной A/k^2, и, значит, ряд (II, 4; 10) равномерно суммируем на вещественной прямой, а его сумма является некоторой непрерывной функцией f.

Дифференцируя почленно $\beta + 2$ раз в смысле теории распределений, получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{2i\pi kx} = a_0 + f^{(\beta+2)}, \qquad \text{(II, 4; 11)}$$

что и требовалось доказать.

Кроме того, мы видим, что сумма этого тригонометрического ряда есть периодическое распределение периода 1, равное сумме постоянной a_0 и производной, в смысле теории распределений, некоторой периодической непрерывной функции f. Попутно мы видим, сколь многочисленны тригонометрические ряды, сходящиеся в $\mathscr{D}'$. Подобный ряд позволяет представить *распределение* посредством ряда из функций и даже посредством ряда из бесконечно дифференцируемых в обычном смысле функций, а именно экспонент.

Можно показать, что всякое периодическое распределение разложимо в $\mathscr{D}'$ в тригонометрический ряд и что достаточное условие сходимости ($|a_k|$ при $|k|\to\infty$ мажорируется степенью $|k|^\alpha$ с подходящим α) является также необходимым.

Например, можно показать, что ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi kx} \tag{II, 4; 12}$$

сходится к периодическому распределению $\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} \delta_{(l)}$, образованному массами $+1$ в каждой точке с целочисленной абсциссой. Дифференцируя, получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (2i\pi k)^m e^{2i\pi kx} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta_{(l)}^{(m)}. \tag{II, 4; 13}$$

§ 5. Распределения с ограниченным носителем

Пространство $\mathscr{E}$

Пространство $\mathscr{E}$ — это пространство комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций на R^n с произвольными носителями.

Пусть T — распределение с ограниченным носителем K, а φ — функция из $\mathscr{E}$. Пусть α — функция из $\mathscr{D}$, равная 1 в некоторой окрестности носителя K распределения T. Тогда $\alpha\varphi\in\mathscr{D}$ и $\langle T, \alpha\varphi\rangle$ вполне определено. Покажем, что это число не зависит от выбора функции α. Если β — какая-либо другая функция из $\mathscr{D}$, равная 1 в некоторой окрестности K, то $(\alpha-\beta)\varphi$ — функция из $\mathscr{D}$, носитель которой лежит в дополнении к K. Следовательно,

$$\langle T, \alpha\varphi\rangle - \langle T, \beta\varphi\rangle = \langle T, (\alpha-\beta)\varphi\rangle = 0. \tag{II, 5; 1}$$

Ч. и т. д.

Мы можем поэтому положить

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \alpha\varphi\rangle \quad \text{для любой} \quad \varphi\in\mathscr{E}. \tag{II, 5; 2}$$

Топология, или понятие сходимости в $\mathscr{E}$

Говорят, что последовательность φ_j сходится к 0 в $\mathscr{E}$, если эти функции, а также любая из их производных, равномерно сходятся к 0 на всяком компакте.

Теперь легко видеть, что всякое распределение с ограниченным носителем является линейным функционалом, непрерывным на $\mathscr{E}$.

Обратно, линейный функционал $L(\varphi)$, непрерывный на $\mathscr{E}$, определяет некоторое распределение с ограниченным носителем.

В самом деле,

1) всякая функция φ, принадлежащая $\mathscr{D}$, лежит в $\mathscr{E}$, и если $\varphi_j \to 0$ в $\mathscr{D}$, то a fortiori $\varphi_j \to 0$ в $\mathscr{E}$. Следовательно, L является линейным функционалом, непрерывным на $\mathscr{D}$, и, значит, определяет такое распределение $T \in \mathscr{D}'$, что

$$L(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle \quad \text{для любой} \quad \varphi \in \mathscr{D}. \qquad \text{(II, 5; 3)}$$

2) Распределение T имеет ограниченный носитель. В самом деле, если бы носитель T был не ограничен, то можно было бы найти функцию $\varphi_n \in \mathscr{D}$ с носителем, лежащим в дополнении к интервалу $|x| < n$, и такую, что $\langle T, \varphi_n \rangle = 1$. Но $\varphi_n \to 0$ в $\mathscr{E}$, и поскольку L, по предположению, непрерывен на $\mathscr{E}$, последовательность $L(\varphi_n)$ должна была бы сходиться к нулю. Таким образом, равенство $\langle T, \varphi_n \rangle = L(\varphi_n) = 1$ при всех n невозможно.

3) Равенство

$$L(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle \qquad \text{(II, 5; 4)}$$

справедливо при всех φ из $\mathscr{E}$. В самом деле, пусть α_j — последовательность функций из $\mathscr{D}$, такая, что $\alpha_j(x) = 1$ при $|x| < j$ и $\alpha_j(x) = 0$ при $|x| \geqslant 2j$. Тогда $\alpha_j\varphi \in \mathscr{D}$ и $\alpha_j\varphi \to \varphi$ в $\mathscr{E}$, когда $j \to \infty$; следовательно, $L(\alpha_j\varphi)$ стремится к $L(\varphi)$. Но при достаточно больших j носитель K распределения T содержится в интервале $|x| < j$ и, согласно определению (II, 5; 2),

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha_j\varphi \rangle. \qquad \text{(II, 5; 5)}$$

Но в силу (II, 5; 3)

$$\langle T, \alpha_j\varphi \rangle = L(\alpha_j\varphi) \quad \text{при всех } j. \qquad \text{(II, 5; 6)}$$

Поэтому при достаточно больших j имеем

$$\langle T, \varphi \rangle = L(\alpha_j\varphi), \qquad \text{(II,5;7)}$$

откуда путем перехода к пределу и получаем высказанный результат.

Резюмируем:

Предложение 15. *Распределения с ограниченным носителем образуют векторное пространство $\mathscr{E}'$, которое есть не что иное, как пространство линейных функционалов, непрерывных на пространстве $\mathscr{E}$.*

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ II

Распределения на прямой

Упражнение II-1. Пусть $Y(x)$—функция Хевисайда; вычислить в смысле теории распределений:

$$\left(\frac{d}{dx}-\lambda\right)Y(x)\,e^{\lambda x},$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\omega^2\right)Y(x)\frac{\sin\omega x}{\omega},$$

$$\frac{d^m}{dx^m}Y(x)\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\quad\text{при целом } m\geqslant 1.$$

Упражнение II-2. Вычислить, в смысле теории распределений, все производные $|x|$.

Упражнение II-3. Все производные должны вычисляться в смысле теории распределений.

1°. Вычислить все производные $|\cos x|$.

2°. Вычислить все производные распределения $U(x)$, задаваемого формулами

$$U(x)=\begin{cases}+1 & \text{при}\quad (2k-1)\frac{\pi}{2}<x<(2k+1)\frac{\pi}{2},\\ -1 & \text{при}\quad (2k+1)\frac{\pi}{2}<x<(2k+3)\frac{\pi}{2},\end{cases}$$

где k принимает все целые четные значения, положительные, отрицательные и нуль.

3°. Получить вновь результат пункта 1°, применяя формулу (II, 3; 15) к соотношению $|\cos x|=U(x)\cos x$.

Упражнение II-4. Проделать упражнение II-3, заменив $|\cos x|$ на $|\sin x|$ и $U(x)$ на распределение $V(x)$, задаваемое формулами

$$V(x)=\begin{cases}+1 & \text{при}\quad 2k\pi<x<(2k+1)\pi,\\ -1 & \text{при}\quad (2k+1)\pi<x<(2k+2)\pi,\end{cases}$$

где k принимает все целые значения, положительные, отрицательные и нуль.

Упражнение II-5. Вычислить, в смысле теории распределений, производные порядков 1, 2, 3, 4 двух распределений:

$$T_1=|x|\sin x,$$

$$T_2=|x|\cos x.$$

Упражнение II-6. Найти распределение $F(t) = Y(t) f(t)$, где $Y(t)$ — функция Хевисайда, а $f(t)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, которое удовлетворяло бы, в смысле теории распределений, уравнению

$$a \frac{d^2F}{dt^2} + b \frac{dF}{dt} + cF = m\delta + n\delta',$$

где a, b, c, m, n — данные константы.

Частные случаи

1°. $a = c = 1$, $b = 2$, $m = n = 1$.

2°. $a = 1$, $b = 0$, $c = 4$, $m = 1$, $n = 0$.

3°. $a = 1$, $b = 0$, $c = -4$, $m = 2$, $n = 1$.

Упражнение II-7. (Письменный экзамен, Париж, 1958.) Пусть $G(x)$ — функция вещественного переменного x со следующими свойствами:

a) $G(x)$ равна нулю при $x < -1$ и при $x > 1$;

в) $G(x)$ бесконечно дифференцируема в каждом из интервалов $-1 < x < \xi$, $\xi < x < 1$, где ξ — данное число, $-1 < \xi < 1$;

c) функция G и ее производные имеют разрывы первого рода в точках $x = -1$, $x = \xi$, $x = 1$.

Первый вопрос

Представить выражение $\frac{d^2G}{dx^2} + \omega^2 G$ (ω — данное вещественное число), где производная берется в смысле теории распределений, через обычные производные.

Второй вопрос

Возможно ли подобрать функцию G и постоянные α и β так, чтобы

$$\frac{d^2G}{dx^2} + \omega^2 G = \delta_{(\xi)} + \alpha\delta_{(-1)} + \beta\delta_{(+1)} \tag{1}$$

($\delta_{(a)}$ означает единичную массу в точке a). Показать, что, за исключением случая, когда $\omega = k\frac{\pi}{2}$, где k — целое $\neq 0$, эта задача имеет одно *и только одно* решение. Найти G и постоянные α и β.

Третий вопрос

Пусть φ — искомая функция из $\mathscr{D}$, про которую известно только, что она удовлетворяет соотношениям

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \omega^2\varphi = \psi(x), \quad \varphi(-1) = L, \quad \varphi(+1) = M, \tag{2}$$

где функция ψ и постоянные L и M известны. Показать, что формула (1) позволяет вычислить $\varphi(\xi)$ для любого ξ в интервале $(-1,\ 1)$, если только ω не принимает исключительного значения.

Упражнение II-8. Пусть дано дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+k^2\right)\psi_k(x)=-4\pi\rho(x), \tag{1}$$

которое подлежит решению так называемым методом функции Грина.

Функцией Грина называется функция, дающая решение уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+k^2\right)G_k(x,\ x')=-4\pi\delta(x-x'), \tag{2}$$

где на этот раз источником является распределение Дирака в точке x'.

Заставим x изменяться в интервале $(0,\ +\infty)$ и предположим, что $\rho(x)$ интегрируема в этой области.

1°. Интегрируя уравнение (2), показать, что функция $\frac{\partial}{\partial x}G_k(x,\ x')$ имеет в точке $x=x'$ скачок, и вычислить этот скачок.

2°. Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — два линейно независимых решения однородного уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+k^2\right)u(x)=0. \tag{3}$$

Тогда функция $\lambda u_1(x_<)u_2(x_>)$, где $x_<$ — наименьшее из чисел x и x', а $x_>$ — наибольшее из чисел x и x', λ — постоянная, не зависящая от x и x', будет функцией Грина.

3°. Показать, что если $\psi_k(x)$ и $G_k(x,\ x')$ подчиняются одним и тем же граничным условиям, то

$$\psi_k(x)=\int\limits_0^\infty G_k(x,\ x')\rho(x')\,dx'.$$

4°. Найти соответствующие $\psi_k(x)$ и $G_k(x,\ x')$ при следующих краевых условиях:

а) $\psi_k(0)=0$,

в) $\psi_k(x)$ эквивалентна e^{ikx} при $x\to\infty$.

Упражнение II-9. 1°. Показать, что для любой бесконечно дифференцируемой функции ψ на R и для любого ограниченного интервала (a, b) интегралы

$$\int_a^b \sin \lambda x \psi(x)\, dx \quad \text{и} \quad \int_a^b \cos \lambda x\, \psi(x)\, dx$$

стремятся к 0, когда $\lambda \to \infty$.

2°. Вывести отсюда, используя разложение

$$\varphi(x) = \varphi(0) + (\varphi(x) - \varphi(0)),$$

что распределение

$$\frac{\sin \lambda x}{x}$$

сходится в $\mathscr{D}'$ к $\pi\delta$, когда $\lambda \to \infty$.

3°. Показать, что при вещественном λ отображение

$$\varphi \in \mathscr{D} \to \text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{x} \varphi(x)\, dx$$

задает некоторое распределение, обозначаемое

$$\text{vp}\, \frac{\cos \lambda x}{x}.$$

Показать также, что это распределение стремится к 0 в $\mathscr{D}'$, когда $\lambda \to \infty$.

Упражнение II-10. Чему равны пределы в $\mathscr{D}'$ при $n \to \infty$ функций

$$\text{а)}\ f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2},$$

$$\text{в)}\ F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\, dt.$$

Упражнение II-11. Показать, что умножение на функцию $\alpha \in \mathscr{E}$ является линейным непрерывным отображением $\mathscr{D}'$ в $\mathscr{D}'$. Найти пределы в $\mathscr{D}'$ при $a \to 0$ функций

$$\frac{a}{x^2 + a^2} \quad \text{и} \quad \frac{ax}{x^2 + a^2}, \quad a > 0.$$

Упражнение II-12. Найти пределы в $\mathscr{D}'$ при $h \to 0$ следующих распределений:

a) $\dfrac{\delta_{(h)} - \delta_{(-h)}}{2h}$,

в) $\dfrac{\delta_{(2h)} + \delta_{(-2h)} - 2\delta_{(0)}}{4h^2}$,

c) $\dfrac{\delta_{(nh)} - C_n^1 \delta_{(n-2)h} + \ldots + (-1)^p C_n^p \delta_{(n-2p)h} + \ldots + (-1)^n \delta_{(-nh)}}{2^n h^n}$,

где $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Упражнение II-13. Для простоты будем рассматривать случай вещественной прямой R.

При целом $m \geqslant 0$ символом $\mathscr{D}^m$ обозначается пространство комплексно-значных, m раз непрерывно дифференцируемых функций, определенных на R и имеющих ограниченные носители. Пространство $\mathscr{D}^m$ снабжается следующей топологией:

$\varphi_j \to \varphi$ в $\mathscr{D}^m$, если носители всех φ_j содержатся в одном и том же ограниченном множестве и если для любого целого p, $0 \leqslant p \leqslant m$, производная $\dfrac{d^p \varphi_j}{dx^p}$ равномерно стремится к $\dfrac{d^p \varphi}{dx^p}$.

Распределением порядка $\leqslant m$ на прямой называется элемент топологического пространства $\mathscr{D}'^m$ двойственного $\mathscr{D}^m$, *то есть* линейная форма, непрерывная на пространстве $\mathscr{D}^m$.

Распределения порядка 0 называются также мерами.

1°. Показать, что для любого целого $m \geqslant 0$ из $T \in \mathscr{D}'^m$ вытекает, что $T \in \mathscr{D}'$. Показать, что для любых целых m и n с $m > n \geqslant 0$ из $T \in \mathscr{D}'^n$ вытекает, что $T \in \mathscr{D}'^m$.

2°. Показать, что при любом целом $m \geqslant 0$ распределение $\delta^{(m)}$

$$\varphi \to (-1)^m \varphi^{(m)}(0)$$

принадлежит $\mathscr{D}'^m$, но не принадлежит никакому $\mathscr{D}'^j$ при $j < m$.

3°. Показать, что отображение, сопоставляющее функции $\varphi \in \mathscr{D}$ число

$$T(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n \varphi(n)}{dx^n},$$

задает некоторое распределение, не являющееся распределением конечного порядка.

Упражнение II-14. I. Пусть дано отображение, которое сопоставляет функции $\varphi \in \mathscr{D}$ число

$$\mathrm{Pf}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx-2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\right].$$

[Символ Pf перед интегралом означает „конечная часть“ (partie finie).] Показать, что это отображение задает некоторое распределение, обозначаемое $\mathrm{Pf}\frac{1}{x^2}$. [Символ Pf перед функцией означает „псевдофункция“ (pseudo fonction); $\mathrm{Pf}\frac{1}{x^2}$ — псевдофункция $\frac{1}{x^2}$.] Вычислить $\frac{d}{dx}\left(\mathrm{vp}\frac{1}{x}\right)$ в смысле теории распределений.

II. Показать, что отображение, сопоставляющее функции $\varphi \in \mathscr{D}$ число

$$\mathrm{Pf}\int_{0}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx+\varphi(0)\lg\varepsilon\right],$$

задает распределение, которое обозначается $\mathrm{Pf}\frac{Y(x)}{x}$.

Проделать то же самое для отображения функции $\varphi \in \mathscr{D}$ в число

$$\mathrm{Pf}\int_{0}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx-\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}+\varphi'(0)\lg\varepsilon\right].$$

Заданное таким образом распределение обозначается $\mathrm{Pf}\frac{Y(x)}{x^2}$.

Вычислить производную распределения $\mathrm{Pf}\frac{Y(x)}{x}$.

III. Распределение $\mathrm{Pf}\frac{Y(-x)}{x}$ [соответственно $\mathrm{Pf}\frac{Y(-x)}{x^2}$] задается формулой

$$\left\langle\mathrm{Pf}\frac{Y(-x)}{x},\ \varphi\right\rangle=\mathrm{Pf}\int_{-\infty}^{0}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx-\varphi(0)\lg\varepsilon\right]$$

[соответственно формулой

$$\left\langle\mathrm{Pf}\frac{Y(-x)}{x^2},\ \varphi\right\rangle=\mathrm{Pf}\int_{-\infty}^{0}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx-\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}-\varphi'(0)\lg\varepsilon\right]].$$

Вычислить производную распределения $\mathrm{Pf}\,\frac{Y(-x)}{x}$. Показать, что

$$\mathrm{vp}\,\frac{1}{x} = \mathrm{Pf}\,\frac{Y(x)}{x} + \mathrm{Pf}\,\frac{Y(-x)}{x},$$

и снова найти, используя результаты пунктов II и III, производную распределения $\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$, найденную в пункте I.

IV. Вычислить производную распределения

$$\mathrm{Pf}\,\frac{1}{|x|} = \mathrm{Pf}\,\frac{Y(x)}{x} - \mathrm{Pf}\,\frac{Y(-x)}{x}.$$

V. Найти все распределения T, удовлетворяющие уравнению

$$xT = \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}.$$

Упражнение II-15. Вычислить $x^k\delta_{(0)}^{(l)}$; построить линейные дифференциальные уравнения, для которых распределение $\delta_{(0)}$ было бы решением.

Упражнение II-16. Найти все распределения T_n, удовлетворяющие уравнению

$$x^n T_n = 1, \quad n \text{ целое} \geqslant 1. \tag{E_n}$$

Заметьте, что если T_n — некоторое решение уравнения (E_n), то T'_n, с точностью до постоянного множителя, является решением уравнения (E_{n+1}).

Распределения в R^n

Упражнение II-17. Рассмотрим на плоскости (x, y) окружность (C) с уравнением $x^2 + y^2 = 1$. Пусть U — распределение, задаваемое функцией, которая равна 0 вне (C) и равна

$$\lg\left[\frac{(x-a)^2+y^2}{(ax-1)^2+a^2y^2}\right]$$

внутри (C). Вычислить ΔU в смысле теории распределений.

Упражнение II-18. Функцией Хевисайда $Y(x, y)$ на плоскости (x, y) называется функция, равная 1 при $x > 0$ и $y > 0$ и равная 0 в остальных точках. Показать, что в смысле теории распределений

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x\,\partial y} = \delta.$$

Упражнение II-19. На плоскости (x, y) рассматривается квадрат $ABCD$:

$$A(1, 1); \quad B(2, 0); \quad C(3, 1); \quad D(2, 2).$$

Пусть T — распределение, задаваемое функцией, которая равна 1 внутри квадрата и 0 вне него. Вычислить в смысле теории распределений

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Упражнение II-20. Обозначим через (C) конус

$$v^2t^2 - x^2 \geqslant 0, \quad t \geqslant 0,$$

на плоскости x, t; v — заданная постоянная. Пусть $E(x, t)$ — распределение

$$E(x, t) = \begin{cases} A & \text{в } (C), \\ 0 & \text{вне } (C), \end{cases}$$

где A — также постоянная.

Вычислить в смысле теории распределений

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{dt^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}.$$

Определить постоянную A в зависимости от v так, чтобы E было фундаментальным решением [1]) для оператора

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Упражнение II-21. Показать, что в смысле теории распределений

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{x+iy}\right) = 2\pi\delta.$$

Упражнение II-22. Вычислить $\Delta\left(\lg\frac{1}{r}\right)$ в R^2.

Упражнение II-23. Показать, что в R^n при $n \geqslant 3$ имеет место, в смысле теории распределений, равенство

$$\Delta\frac{1}{r^m} = \left\{\Delta\frac{1}{r^m}\right\} \quad \text{при } m < n-2.$$

---

[1]) То есть чтобы $\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)E = \delta(x, t)$. Фундаментальным или элементарным решением для данного оператора называется такое распределение, которое данным оператором переводится в δ. — *Прим. перев.*

Вычислить, в смысле теории распределений,

$$\Delta\left(\frac{\varphi}{r^{n-2}}\right),$$

где φ — бесконечно дифференцируемая функция.

Примеры. $\varphi = e^{-kr}$, $\varphi = \sin kr$ [1]).

Упражнение II-24. Вычислить в R^n, в смысле теории распределений, $\Delta^k (r^{2k-n} \lg r)$ при $2k - n$ — четном целом числе $\geqslant 0$.

Упражнение II-25. Положим $E(x, t) = \frac{Y(t)}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ на плоскости (x, t). Вычислить, в смысле теории распределений,

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}.$$

Упражнение II-26. В R^3 рассматривается функция $f(r)$, зависящая только от $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и являющаяся при $r \neq 0$ решением уравнения

$$\Delta f + a^2 f = 0.$$

Написать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $g(r) = rf(r)$. Показать, что если $l = \lim\limits_{r \to 0} [rf(r)]$, то, в смысле теории распределений,

$$(\Delta + a^2) f = kl\delta,$$

где k — некоторая постоянная $\neq 0$, которую надо вычислить.

Упражнение II-27. Найти элементарное решение для оператора

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - a\frac{\partial}{\partial x} - b\frac{\partial}{\partial y} + ab,$$

где a и b — два данных комплексных числа.

Упражнение II-28. Элементарное решение для оператора

$$\Box = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

---

[1]) Эти функции не являются бесконечно дифференцируемыми в R^n в начале координат. — *Прим. перев.*

I. Положим $\rho = v^2t^2 - x^2 - y^2$.

1) Показать, что если функция $f(\rho)$ зависит только от ρ, то

$$\Box f = Df,$$

где

$$D = 4\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + 6 \frac{d}{d\rho}. \tag{1}$$

2) Обозначим через $Y_\varepsilon(\rho)$, где $\varepsilon > 0$, функцию

$$Y_\varepsilon(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{при } \rho > \varepsilon, \\ 0 & \text{при } \rho < \varepsilon. \end{cases}$$

Вычислить, в смысле теории распределений,

$$D \frac{Y_\varepsilon(\rho)}{\sqrt{\rho}},$$

где D дается формулой (1).

3) Пусть T — распределение, зависящее от ρ; показать, что для любой бесконечно дифференцируемой функции φ переменного ρ с ограниченным носителем имеет место равенство

$$\langle DT, \varphi \rangle = \langle T, D^*\varphi \rangle,$$

где D^* — дифференциальный оператор, который надо найти.

II. Обозначим через (C) волновой конус будущего в пространстве (x, y, t):

$$\begin{cases} v^2t^2 - x^2 - y^2 \geqslant 0, \\ t \geqslant 0. \end{cases}$$

Пусть $E(x, y, t)$ — распределение, задаваемое формулами

$$E(x, y, t) = \begin{cases} \dfrac{v}{2\pi} \dfrac{1}{\sqrt{v^2t^2 - x^2 - y^2}} & \text{в } (C), \\ 0 \text{ вне } (C). \end{cases}$$

1°. Показать, что для любой бесконечно-дифференцируемой функции $\varphi(x, y, t)$ с ограниченным носителем имеет место равенство

$$\langle \Box E, \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}} \iint_{R^2} \frac{\Box \varphi \cdot r\,dr\,d\theta}{2\sqrt{r^2 + \rho^2}}. \tag{2}$$

[В качестве новых переменных берутся ρ и полярные координаты r и θ на плоскости (x, y).]

2°. Для произвольной функции $\varphi(x, y, t) \in \mathscr{D}$ положим

$$\tilde{\varphi}(\rho) = v \int\int_{R^2} \frac{\varphi\left(r\cos\theta, r\sin\theta, \frac{1}{v}\sqrt{r^2+\rho^2}\right)}{2\sqrt{r^2+\rho^2}} r\,dr\,d\theta. \quad (3)$$

Принимая без доказательства, что $\widetilde{\Box\varphi} = D^*\tilde{\varphi}$, показать, что

$$\langle \Box E, \varphi \rangle = -\frac{2}{\pi v} \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\sqrt{\varepsilon} \left(\frac{d\tilde{\varphi}}{d\rho} \right)_{\rho=\varepsilon} \right].$$

III. Обозначим, при фиксированных r и t, через $\bar{\varphi}(r, t)$ среднее функции $\varphi(x, y, t)$ по окружности $x^2 + y^2 = r^2$.

1°. Показать, что

$$\left(\frac{d\tilde{\varphi}}{d\rho} \right)_{\rho=\varepsilon} = \frac{\pi}{2} \left[\int_0^\infty \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \cdot \frac{r\,dr}{(r^2+\varepsilon)} - v \int_0^\infty \bar{\varphi}\left(r, \frac{1}{v}\sqrt{r^2+\varepsilon}\right) \frac{r\,dr}{(r^2+\varepsilon)^{3/2}} \right].$$

2°. Интегрируя по частям второй интеграл в правой части, показать, что

$$\left(\frac{d\tilde{\varphi}}{d\rho} \right)_{\rho=\varepsilon} = -\frac{\pi v}{2\sqrt{\varepsilon}} \bar{\varphi}\left(0, \frac{\sqrt{\varepsilon}}{v}\right) + A(\varepsilon; \varphi),$$

где $\sqrt{\varepsilon}\, A(\varepsilon; \varphi) \to 0$, когда $\varepsilon \to 0$.

3°. Вывести отсюда, что распределение $E(x, y, t)$, приведенное в пункте II, является искомым элементарным решением.

ГЛАВА III

СВЕРТКА

§ 1. Тензорное произведение распределений

1. Тензорное произведение двух распределений. Пусть X^m и Y^n — два евклидовых пространства m и n измерений с текущими точками $x(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и $y(y_1\ y_2, \ldots, y_n)$. Обозначим через Z^{m+n} произведение $X^m \times Y^n$ — множество точек

$$(x, y) = (x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Это — евклидово пространство $m+n$ измерений.

Пусть $f(x)$ — числовая функция на X^m, $g(y)$ — числовая функция на Y^n. Тензорным произведением этих функций $f(x) \otimes g(y)$ мы называем функцию $h(x, y) = f(x) g(y)$, определенную на Z^{m+n}.

Если, в частности, f и g локально суммируемы на X^m и Y^n, то h будет локально суммируемой на Z^{m+n}, так что можно надеяться распространить тензорное произведение на распределения.

Обозначим через $(\mathscr{D})_x$, $(\mathscr{D})_y$, $(\mathscr{D})_{x, y}$ пространства $\mathscr{D}$ бесконечно дифференцируемых функций с ограниченными носителями на пространствах X^m, Y^n, $X^m \times Y^n$ соответственно; $(\mathscr{D}')_x$, $(\mathscr{D}')_y$, $(\mathscr{D}')_{x, y}$ — соответствующие пространства распределений. Пусть $\varphi(x, y) \in (\mathscr{D})_{x, y}$ — функция вида $u(x) v(y)$, где $u(x) \in (\mathscr{D})_x$, а $v(y) \in (\mathscr{D})_y$. Тогда

$$\langle f(x) \otimes g(y), u(x) v(y) \rangle = \int_{X^m \times Y^n} \cdots \int f(x) g(y) u(x) v(y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{X^m} f(x) u(x)\, dx \int_{Y^n} g(y) v(y)\, dy = \langle f, u \rangle \langle g, v \rangle, \qquad \text{(III, 1; 1)}$$

Если же функция φ не имеет такого вида, то можно воспользоваться правилом Фубини:

$$\langle f(x) \otimes g(y), \varphi(x, y) \rangle = \int_{X^m \times Y^n} \cdots \int f(x) g(y) \varphi(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{X^m} f(x)\, dx \int_{Y^n} g(y) \varphi(x, y)\, dy = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle, \qquad \text{(III, 1; 2)}$$

и аналогично

$$\langle f(x)\otimes g(y),\ \varphi(x,\ y)\rangle = \langle g(y),\ \langle f(x),\ \varphi(x,\ y)\rangle\rangle. \qquad \text{(III, 1; 3)}$$

В качестве обобщения *можно доказать* следующее предложение.

Предложение 1. *Пусть* $S_x \in (\mathcal{D}')_x$ *и* $T_y \in (\mathcal{D}')_y$, *тогда существует вполне определенное и единственное распределение* $W_{x,\,y} \in (\mathcal{D}')_{x,\,y}$, *такое, что для любой функции* $\varphi \in (\mathcal{D})_{x,\,y}$, *имеющей вид* $\varphi(x,\ y) = u(x)v(y)$, *где* $u(x) \in (\mathcal{D})_x$, $v(y) \in (\mathcal{D})_y$, *справедливо равенство*

$$\langle W_{x,\,y},\ u(x)v(y)\rangle = \langle S,\ u\rangle\langle T,\ v\rangle. \qquad \text{(III, 1; 4)}$$

Распределение $W_{x,\,y}$ *называется тензорным произведением распределений* S *и* T *и обозначается* $S\otimes T$. *Для* $\varphi(x,\ y) \in (\mathcal{D})_{x,\,y}$ *можно вычислять* $\langle W,\ \varphi\rangle$ *по правилу Фубини. Фиксируем* x. *Тогда* $\varphi(x,\ y)$ *как функция одного только* y *принадлежит* $(\mathcal{D})_y$ *и можно вычислить*

$$\theta(x) = \langle T_y,\ \varphi(x,\ y)\rangle. \qquad \text{(III, 1; 5)}$$

Это число зависит от x; θ *как функция от* x *принадлежит* $(\mathcal{D})_x$, *и можно вычислить* $\langle S,\ \theta\rangle$. *Имеет место равенство*

$$\langle W,\ \varphi\rangle = \langle S,\ \theta\rangle = \langle S_x,\ \langle T_y,\ \varphi(x,\ y)\rangle\rangle \qquad \text{(III, 1; 6)}$$

и аналогичное равенство

$$\langle W,\ \varphi\rangle = \langle T_y,\ \langle S_x,\ \varphi(x,\ y)\rangle\rangle. \qquad \text{(III, 1; 7)}$$

Для носителя W справедливо утверждение:

Предложение 2. *Носитель* W *является произведением* $A\times B$ *носителей* S *и* T, *т. е. множеством точек* $(x,\ y)$, *где* $x\in A$ *и* $y \in B$.

Доказательство предложения 2

1) Пусть $\varphi(x,\ y)$ — функция из $(\mathcal{D})_{x,\,y}$, носитель которой содержится в дополнении к $A\times B$. При $x \in A$ носитель функции $y \to \varphi(x,\ y)$ лежит в дополнении к B и, следовательно, $\theta(x) = 0$. Значит, носитель $\theta(x)$ лежит в дополнении к A, откуда вытекает, что $\langle S_x,\ \theta(x)\rangle = 0$, т. е. $\langle W,\ \varphi\rangle = 0$. Это рассуждение показывает, что носитель W содержится в $A\times B$.

2) Из формулы (III, 1; 4) легко усмотреть, что всякая точка произведения $A\times B$ действительно принадлежит носителю W.

Примеры и формулы

1) Говорят, что функция не зависит от x, если она имеет вид $g(y) = 1_x \otimes g(y)$. Аналогично мы говорим, что распределение не зависит от x, если оно имеет вид $1_x \otimes T_y$. В этом случае

$$\langle 1_x \otimes T_y, \ \varphi \rangle = \int\limits_{X^m} \langle T_y, \ \varphi(x, \ y) \rangle \, dx = \langle T_y, \ \int\limits_{X^m} \varphi(x, \ y) \, dx \rangle. \quad \text{(III, 1; 8)}$$

Если D_x^p — некоторое дифференцирование по x, D_y^q — некоторое дифференцирование по y, то

$$D_x^p D_y^q (S_x \otimes T_y) = (D_x^p S) \otimes (D_y^q T)^{1)}. \quad \text{(III, 1; 9)}$$

3)

$$\delta_x \otimes \delta_y = \delta_{x, y}. \quad \text{(III, 1; 10)}$$

4) Пусть Y — функция Хевисайда от n переменных, равная 1 в „квадранте“ $x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ \ldots, \ x_n \geqslant 0$ и равная 0 в остальных точках. Она равна тензорному произведению $Y(x_1) \otimes Y(x_2) \otimes \ \ldots \ \otimes Y(x_n)$.

Поскольку

$$\frac{d}{dx_i} Y(x_i) = \delta_{x_i},$$

имеем

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1 \, \partial x_2 \ldots \partial x_n} Y = \delta_{x_1, x_2, \ldots, x_n}. \quad \text{(III, 1; 11)}$$

2. Тензорное произведение нескольких распределений. Все только что сказанное по поводу двух распределений легко распространяется на тензорное произведение конечного числа распределений. Это произведение ассоциативно. Если X^l, Y^m, Z^n — три евклидовых пространства размерностей соответственно l, m, n, а R_x, S_y, T_z — три распределения на этих пространствах, то тензорное произведение $R_x \otimes S_y \otimes T_z$ определяется формулой

$$\langle R_x \otimes S_y \otimes T_z, \ u(x) v(y) w(z) \rangle = \langle R, \ u \rangle \langle S, \ v \rangle \langle T, \ w \rangle. \quad \text{(III, 1; 12)}$$

При $\varphi \in (\mathscr{D})_{x, y, z}$ значение $\langle R_x \otimes S_y \otimes T_z, \ \varphi \rangle$ снова вычисляется по правилу Фубини. Имеет место соотношение

$$R_x \otimes S_y \otimes T_z = R_x \otimes (S_y \otimes T_z) = (R_x \otimes S_y) \otimes T_z. \quad \text{(III, 1; 13)}$$

---

[1]) В предложении 1 полезно было бы отметить формулу

$$D_x^p \theta(x) = D_x^p \langle T_y, \ \varphi(x, \ y) \rangle = \langle T_y, \ D_x^p \varphi(x, \ y) \rangle,$$

которая используется при доказательстве формулы (III, 1; 9). — *Прим. перев.*

§ 2. Свертка

1. Свертка двух распределений. Пусть S и T — два распределения на R^n. Сверткой этих распределений $S * T$ называется новое распределение на R^n, определяемое формулой

Определение

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_\xi \otimes T_\eta, \varphi(\xi + \eta) \rangle. \qquad \text{(III. 2; 1)}$$

Если $S * T$ существует, то, очевидно, существует и $T * S$, и эти распределения равны.

В правой части равенства стоит $S_\xi \otimes T_\eta$ — распределение на евклидовом пространстве переменного (ξ, η) $2n$ измерений; если в функции $\varphi(x)$ заменить x на $\xi + \eta$ (сумма двух векторов из R^n), то возникнет функция $\varphi(\xi + \eta)$ пары переменных (ξ, η) и правая часть равенства (III, 2; 1) может иметь смысл.

Тензорное произведение $S_\xi \otimes T_\eta$ существует всегда. Если A и B суть носители S и T в R^n, то носителем $S_\xi \otimes T_\eta$ будет $A \times B$ — множество пар (ξ, η), таких, что $\xi \in A$, $\eta \in B$. Функция $\varphi(\xi + \eta)$, разумеется, бесконечно дифференцируема по ξ и по η, однако носитель ее не ограничен. Действительно, если K — носитель $\varphi(x)$, то носителем $\varphi(\xi + \eta)$ будет множество таких пар (ξ, η), что $\xi + \eta \in K$. Носитель $\varphi(\xi + \eta)$ — „полоса", параллельная „побочной биссектрисе", имеющей уравнение $\xi + \eta = 0$. („Побочная биссектриса" в случае пространства n измерений является подпространством n измерений, задаваемым уравнениями $\xi_1 + \eta_1 = 0, \ldots, \xi_n + \eta_n = 0$.)

Однако правая часть равенства (III, 2; 1) будет иметь смысл, если носитель $S_\xi \otimes T_\eta$ имеет ограниченное пересечение с носителем $\varphi(\xi + \eta)$; иначе говоря, если множество точек (ξ, η) с $\xi \in A$, $\eta \in B$ и $\xi + \eta \in K$ ограничено.

Предыдущее множество должно быть ограниченным *при любом* ограниченном K, поскольку функционал $\langle S * T, \varphi \rangle$ должен быть определен для *любой* функции $\varphi \in (\mathscr{D})_x$.

Итак:

Предложение 3. *Свертка $S * T$, определяемая формулой* (III, 2; 1), *имеет смысл, если носители A и B распределений S и T таковы, что при $\xi \in A$ и $\eta \in B$ сумма $\xi + \eta$ может оставаться ограниченной, только если оба переменных ξ и η остаются ограниченными. Свертка коммутативна $S * T = T * S$.*

Пример 1. *Свертка $S * T$ существует, если хотя бы одно из двух распределений S или T имеет ограниченный носитель.*

Действительно, пусть A ограничено. Тогда переменное $\xi \in A$ обязательно ограничено; если при этом ограничена сумма $\xi + \eta$, то второе переменное $\eta = (\xi + \eta) - \xi$ также ограничено.

Пример 2. *Свертка на окружности.*

Пусть Γ — окружность с центром O, радиуса $T/2\pi$ и длины T в евклидовой плоскости. Распределения на Γ изучаются в связи с периодическими распределениями и рядами Фурье. Сложением $\xi+\eta$ здесь является сложение дуг (началом координат служит точка $s=0$ на Γ). Свертка всегда имеет смысл, поскольку все носители ограничены.

Пример 3. Мы говорим, что носитель распределения на прямой R „ограничен слева", если он содержится в некотором луче $(a, +\infty)$.

Предположим, что носители обоих распределений S и T ограничены слева; A и B лежит на некотором луче $(a, +\infty)$. Переменные ξ и η всегда $\geqslant a$. Если сумма $\xi+\eta$ ограничена, то она не превосходит некоторой постоянной ($\leqslant C$); поскольку $\xi\geqslant a$, имеем $\eta\leqslant C-a$ и аналогично $\xi\leqslant C-a$; следовательно, ξ и η остаются ограниченными, и свертка $S*T$ существует.

Свертка $S*T$ существует также, если носители S и T „ограничены справа"; напротив, свертка $S*T$ не обязана существовать, если один из носителей ограничен слева, а другой — справа.

Пример 4. Предположим, что носитель A лежит в волновом конусе будущего

$$t=x_4\geqslant 0, \quad x_4^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2\geqslant 0$$

пространства R^4 (пространства-времени), а носитель B лежит в полупространстве $t=x_4\geqslant 0$.

Пусть теперь $\xi\in A$, $\eta\in B$ и сумма $\xi+\eta$ ограничена. Тогда, во-первых, $\xi_4+\eta_4$ остается $\leqslant C$ и, поскольку $\xi_4\geqslant 0$ и $\eta_4\geqslant 0$, переменные ξ_4 и η_4 заключены между 0 и C, т. е. ограничены (пример 3). Поскольку, далее, $\xi_4^2\geqslant\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2$, переменные ξ_1, ξ_2, ξ_3 остаются ограниченными. Наконец, поскольку сумма $\xi_1+\eta_1$ ограничена, переменное η_1 также должно оставаться ограниченным, и то же самое верно для η_2 и η_3. В результате ξ и η остаются ограниченными и свертка $S*T$ имеет смысл.

Основные свойства

Предложение 4. *Пусть S и T — локально суммируемые функции f и g (определенные только почти всюду), и пусть носители A и B удовлетворяют условиям предложения 3. Тогда свертка $S*T$ будет локально суммируемой функцией h, которая определяется почти всюду формулой*

$$h(x)=\int_{R^n} f(x-t)\,g(t)\,dt=\int_{R^n} f(t)\,g(x-t)\,dt. \qquad \text{(III, 2; 2)}$$

В самом деле, положим $W = f * g$, тогда

$$\langle W, \varphi \rangle = \langle f_\xi g_\eta, \varphi(\xi + \eta) \rangle = \iint f(\xi) g(\eta) \varphi(\xi + \eta) \, d\xi \, d\eta. \quad \text{(III, 2; 3)}$$

Требования, наложенные на носители A и B, гарантируют, что этот двойной интеграл имеет смысл, ибо в силу локальной суммируемости функций f и g функция $f(\xi) g(\eta) \varphi(\xi + \eta)$ также локально суммируема, а поскольку ее носитель ограничен, она просто суммируема.

Произведем замену переменных $x = \xi + \eta$, $t = \eta$; якобиан этой замены равен 1, и поэтому

$$d\xi \, d\eta = dx \, dt.$$

Имеем

$$\langle W, \varphi \rangle = \iint f(x - t) g(t) \varphi(x) \, dx \, dt =$$

$$= \int\limits_{R^n} dx \int\limits_{R^n} \varphi(x) f(x - t) g(t) \, dt. \quad \text{(III, 2; 4)}$$

В силу теоремы Фубини интеграл в правой части имеет смысл почти для всех значений x. Следовательно, интеграл $\int\limits_{R^n} f(x - t) g(t) \, dt$ имеет смысл для почти всех значений x, при которых, $\varphi(x) \neq 0$; но, поскольку это верно для любой функции $\varphi(x) \in (\mathscr{D})_x$, интеграл $\int\limits_{R^n} f(x - t) g(t) \, dt$ имеет смысл для почти всех значений x, а его величина $h(x)$ является функцией, определенной почти всюду. По теореме Фубини, функция $\varphi(x) h(x)$ всегда является суммируемой, поэтому $h(x)$ локально суммируема. Наконец,

$$\langle W, \varphi \rangle = \int\limits_{R^n} h(x) \varphi(x) \, dx = \langle h, \varphi \rangle. \quad \text{(III, 2; 5)}$$

Это соотношение доказывает, что $W = h$.

Вторую из формул (III, 2; 2) можно получить, полагая $\xi = t$, $\xi + \eta = x$. Ее можно также получить заменой t на $x - t$ в первой из формул (III, 2; 2).

Замечание. Можно доказать, что свертка $h = f * g$ будет непрерывной функцией, если f и g *непрерывны*. Это остается верным, если только одна из них непрерывна или хотя бы локально ограничена, а другая — локально суммируема.

В случае двух функций свертка $f * g$ может иметь смысл даже если условия на носители не выполнены. Например, если одна из двух функций

суммируема на R^n, а другая *ограничена* на R^n, то свертка $f * g$ будет иметь смысл. При этом она будет ограниченной непрерывной функцией на R^n, а интеграл (III, 2; 2), очевидно, будет иметь смысл *для всех* значений x. Кроме того, при суммируемой f и ограниченной g имеет место оценка

$$|h(x)| \leqslant \int_{R^n} |f(x)|\,dx \cdot \sup_{x \in R^n} |g(x)|, \tag{III, 2; 6}$$

или

$$\|h\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^\infty}. \tag{III, 2; 7}$$

В случае, когда f и g принадлежат L^1, свертка $f * g$ всегда имеет смысл и также принадлежит L^1. При этом

$$\|f * g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}. \tag{III, 2; 8}$$

Если, как в примере 3, предположить, что носители обеих функций f и g лежат на луче $(0, \infty)$, то носитель h также будет лежать на луче $(0, \infty)$, а формула (III, 2; 2) приобретет вид

$$h(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 0, \\ \int_0^x f(x-t)\,g(t)\,dt \quad \text{при } x \geqslant 0. \end{cases} \tag{III, 2; 9}$$

Примеры.

1) Положим

$$Y_{(\lambda)}^{(\alpha)}(x) = Y(x)\,\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,e^{\lambda x}, \quad \alpha > 0, \tag{III, 2; 10}$$

где λ — произвольное комплексное число.

Тогда

$$Y_{(\lambda)}^{(\alpha)} * Y_{(\lambda)}^{(\beta)} = Y_{(\lambda)}^{(\alpha+\beta)}. \tag{III, 2; 11}$$

В самом деле, свертка равна нулю при $x \leqslant 0$, а при $x \geqslant 0$ она имеет вид

$$\left(Y_{(\lambda)}^{(\alpha)} * Y_{(\lambda)}^{(\beta)}\right)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \cdot e^{\lambda(x-t)} \cdot e^{\lambda t}\,dt =$$

$$= \frac{x^{\alpha+\beta-1}e^{\lambda x}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \cdot \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1}\,du \tag{III, 2; 12}$$

(где была сделана подстановка $t = xu$). Но ведь оставшийся интеграл есть $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, откуда и следует высказанный результат.

В частности, распределение

$$Y_{(\lambda)}^{(n)}(x) = Y(x)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda x} \qquad \text{(III, 2; 13)}$$

будет n-й сверточной степенью распределения $Y(x)e^{\lambda x}$. Эти свертки играют известную роль в теории дифференцирования нецелого порядка и в теории вероятностей.

2) Положим

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \qquad \sigma > 0; \qquad \text{(III, 2; 14)}$$

тогда

$$G_\sigma * G_\tau = G_{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}. \qquad \text{(III, 2; 15)}$$

В самом деле,

$$(G_\sigma * G_\tau)(x) = \frac{1}{2\pi\sigma\tau}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2\sigma^2}-\frac{t^2}{2\tau^2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma\tau}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}+\frac{xt}{\sigma^2}-\frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma\tau}e^{-\frac{x^2}{2(\sigma^2+\tau^2)}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{\sigma^2+\tau^2}{\sigma^2\tau^2}\left(t-\frac{\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}x\right)^2}\,dt. \qquad \text{(III, 2; 16)}$$

Сделаем замену переменного:

$$\frac{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}{\sigma\tau}\left(t-\frac{\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}x\right) = u, \qquad \text{(III, 2; 17)}$$

тогда последний интеграл примет вид

$$\frac{\sigma\tau}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \sqrt{2\pi}\,\frac{\sigma\tau}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}, \qquad \text{(III, 2; 18)}$$

откуда

$$(G_\sigma * G_\tau)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}e^{-\frac{x^2}{2(\sigma^2+\tau^2)}} = G_{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}(x). \qquad \text{(III, 2; 19)}$$

Доказанная таким образом формула (III, 2; 15) играет важную роль в теории вероятностей. Распределение G_σ, рассматриваемое как „плотность вероятности“, является распределением Гаусса (кривая, изображающая функцию $y = G_\sigma(x)$, — „колоколообразная кривая“). Среднее значение для G_σ

равно 0 $\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x G_\sigma(x)\, dx = 0 \right)$, а среднее квадратическое отклонение равно σ $\left(\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 G_\sigma(x)\, dx \right]^{1/2} = \sigma \right)$.

Если каждая из двух вещественных независимых случайных величин подчиняется закону Гаусса со средними квадратическими отклонениями, равными σ и τ, то их сумма подчиняется вероятностному закону, определяемому сверткой

$$G_\sigma * G_\tau,$$

т. е. снова закону Гаусса со средним квадратическим отклонением $\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$.

В частности, сумма n независимых случайных величин, подчиняющихся одновременно закону Гаусса с отклонением σ, сама подчиняется закону Гаусса с отклонением $\sigma\sqrt{n}$.

Именно это явление позволяет утверждать, что ожидаемый порядок погрешности суммы n величин, подчиняющихся одному и тому же закону погрешностей, равен порядку погрешности отдельного измерения, умноженному на $\sqrt{n}$; деля на n, мы видим, что среднее арифметическое n измерений имеет погрешность порядка $\frac{1}{\sqrt{n}} \times$ погрешность отдельного измерения.

Если вместо G_σ взять

$$H_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\pi^2 \frac{x^2}{\sigma^2}}, \quad \sigma > 0, \tag{III, 2; 20}$$

то снова

$$H_\sigma * H_\tau = H_{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}. \tag{III, 2; 21}$$

3) Положим

$$P_a(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2}, \quad a > 0. \tag{III, 2; 22}$$

Тогда интегрирование дает формулу

$$P_a * P_b = P_{a+b}. \tag{III, 2; 23}$$

Предложение 5. *Пусть α — бесконечно дифференцируемая (в обычном смысле) функция, T — распределение, тогда свертка $T * \alpha$ будет бесконечно дифференцируемой (в обычном смысле) функцией, которая дается формулой*

$$(T * \alpha)(x) = \langle T_t, \alpha(x - t) \rangle. \tag{III, 2; 24}$$

Говорят, что свертка с α является регуляризацией распределения T посредством функции α; функцию α называют также регуляризатором T, а свертку $T * \alpha$ называют регуляризантой T[1]) *посредством α.*

Во-первых, выражение $h(x) = \langle T_t, \alpha(x-t)\rangle$ имеет следующий смысл. Переменное x фиксируется, тогда $\alpha(x-t)$, рассматриваемая как функция от одного t, будет *принадлежать* $\mathscr{D}$ *и к ней* можно применить функционал T_t. Результат будет, разумеется, некоторой функцией от x. Эта функция будет бесконечно дифференцируемой по x в силу того, что мы приняли без доказательства в связи с тензорным произведением (см. функцию θ в предложении 1).

Остается показать, что эта функция, как распределение, совпадает с $T * \alpha$. Имеем

$$\begin{aligned}\langle T*\alpha, \varphi\rangle &= \langle T_\xi \otimes \alpha(\eta), \varphi(\xi+\eta)\rangle = \langle T_\xi, \langle \alpha(\eta), \varphi(\xi+\eta)\rangle\rangle = \\ &= \Big\langle T_\xi, \int\limits_{R^n} \alpha(\eta)\varphi(\xi+\eta)\,d\eta\Big\rangle = \langle T_\xi, \langle \varphi(x), \alpha(x-\xi)\rangle\rangle = \\ &= \langle T_\xi \otimes \varphi(x), \alpha(x-\xi)\rangle = \langle \varphi(x), \langle T_\xi, \alpha(x-\xi)\rangle\rangle = \\ &= \int\limits_{R^n} (\langle T_\xi, \alpha(x-\xi)\rangle)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{R^n} h(x)\varphi(x)\,dx = \langle h, \varphi\rangle.\end{aligned} \qquad \text{(III, 2; 25)}$$

Ч. и т. д.

Замечание. Если T — функция f, то формула (III, 2; 24) снова дает

$$(f*\alpha)(x) = \int\limits_{R^n} f(t)\,\alpha(x-t)\,dt \qquad \text{(III, 2; 26)}$$

— результат, который мы уже доказали, когда α — локально суммируемая, но не обязательно дифференцируемая функция.

Примеры.

1) $T*1$ есть постоянная $\langle T, 1\rangle$[2]).

2) Если α — полином степени $\leqslant m$, то $T*\alpha$ также будет полиномом степени $\leqslant m$. Например, в случае одного переменного ($n=1$) имеем

$$(T*\alpha)(x) = \langle T_t, \alpha(x-t)\rangle = \sum_{k\leqslant m} \frac{x^k}{k!}\langle T_t, \alpha^{(k)}(-t)\rangle. \qquad \text{(III, 2; 27)}$$

3) Пусть в случае одного переменного ($n=1$) распределение T имеет ограниченный носитель.

---

[1]) Термин не является общепринятым. — *Прим. перев.*

[2]) Теорема о бесконечной дифференцируемости $T*\alpha$ была доказана для α с ограниченным носителем. Можно было считать ограниченным и носитель T. — *Прим. перев.*

Преобразованием Лапласа распределения T называется голоморфная функция комплексного переменного λ, определяемая формулой

$$\mathcal{T}(\lambda)=\langle T_x,\ e^{-\lambda x}\rangle. \qquad \text{(III, 2; 28)}$$

Рассмотрим свертку $S*T$[1]; пусть $\mathcal{U}(\lambda)$ — ее преобразование Лапласа. Имеем

$$\mathcal{U}(\lambda)=\langle S*T,\ e^{-\lambda x}\rangle=\langle S_\xi\otimes T_\eta,\ e^{-\lambda(\xi+\eta)}\rangle=$$
$$=\langle S_\xi\otimes T_\eta,\ e^{-\lambda\xi}e^{-\lambda\eta}\rangle=\langle S_\xi,\ e^{-\lambda\xi}\rangle\langle T_\eta,\ e^{-\lambda\eta}\rangle=\mathcal{S}(\lambda)\mathcal{T}(\lambda). \qquad \text{(III, 2; 29)}$$

Преобразование Лапласа свертки $S*T$ есть (обычное) произведение преобразований Лапласа распределений S и T.

• Предложение 6. *Имеют место три формулы:*

$$\delta*T=T; \qquad \text{(III, 2; 30)}$$
$$\delta_{(a)}*T=\tau_aT, \qquad \delta_{(a)}*\delta_{(b)}=\delta_{(a+b)}; \qquad \text{(III, 2; 31)}$$
$$\delta'*T=T'. \qquad \text{(III, 2; 32)}$$

В самом деле,

$$\langle\delta*T,\ \varphi\rangle=\langle\delta_\xi\otimes T_\eta,\ \varphi(\xi+\eta)\rangle=$$
$$=\langle T_\eta,\ \langle\delta_\xi,\ \varphi(\xi+\eta)\rangle\rangle=\langle T_\eta,\ \varphi(\eta)\rangle=\langle T,\ \varphi\rangle, \qquad \text{(III, 2; 33)}$$

откуда вытекает формула (III, 2; 30). Эта очень важная формула показывает, что по отношению к свертке *распределение δ играет роль единицы.* В теоретической физике формулу (III, 2; 30) очень часто (некорректно) записывают в виде

$$\int f(x-t)\delta(t)\,dt=\int f(t)\delta(x-t)\,dt=f(x) \qquad \text{(III, 2; 34)}$$

и рассматривают как главнейшее свойство δ.

В формуле (III, 2; 31) [которая содержит (III, 2; 30) как частный случай] $\delta_{(a)}$ — единичная масса в точке a, которую записывают также в виде $\delta(x-a)$; τ_aT — сдвинутое распределение T при сдвиге a; его записывают также в виде T_{x-a} [или, в физике, $T(x-a)$]; этот сдвиг τ_aT можно определить формулой

$$\langle\tau_aT,\ \varphi\rangle=\langle T_x,\ \varphi(x+a)\rangle, \qquad \text{(III, 2; 35)}$$

тогда формула (III, 2; 31) доказывается сразу же:

$$\langle\delta_{(a)}*T,\varphi\rangle=\langle\delta_{(a)\xi}\otimes T_\eta,\varphi(\xi+\eta)\rangle=\langle T_\eta,\langle\delta_{(a)\xi},\varphi(\xi+\eta)\rangle\rangle=\langle T_\eta,\varphi(a+\eta)\rangle. \qquad \text{(III, 2; 36)}$$

---

[1]) Если $S\in\mathcal{E}'$ и $T\in\mathcal{E}'$, то $S*T\in\mathcal{E}$. См. ниже вывод к предложению 8.

Частный случай формулы (III, 2; 31) получается, если положить $T=\delta_{(b)}$, тогда $\delta_{(a)}*\delta_{(b)}=\delta_{(a+b)}$.

Наконец, формула (III, 2; 32) доказывается так:

$$\langle\delta'*T,\ \varphi\rangle=\langle\delta'_\xi\otimes T_\eta,\ \varphi(\xi+\eta)\rangle=\langle T_\eta,\ \langle\delta'_\xi,\ \varphi(\xi+\eta)\rangle\rangle=$$
$$=\langle T_\eta,\ -\varphi'(\eta)\rangle=-\langle T,\ \varphi'\rangle=\langle T',\ \varphi\rangle. \qquad \text{(III, 2; 37)}$$

Ч. и т. д.

Точно таким же способом, естественно, получаем

$$\delta^{(m)}*T=T^{(m)}. \qquad \text{(III, 2; 38)}$$

Аналогично если D — дифференциальный оператор в R^n с постоянными коэффициентами, то

$$D\delta*T=DT. \qquad \text{(III, 2; 39)}$$

В частности, если D — лапласиан в R^n

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

или если D — даламбертиан в R^4 (в пространстве-времени)

$$\Box=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial_2}{\partial t^2}-\Delta,$$

то имеем

$$\Delta\delta*T=\Delta T, \qquad \text{(III, 2; 40)}$$
$$\Box\delta*T=\Box T.$$

Формулу (III, 2; 32) в квантовой физике часто записывают (некорректно) в виде

$$\int\delta'(x-t)f(t)\,dt=f'(x), \qquad \text{(III, 2; 41)}$$

и получают ее „дифференцированием под знаком $\int$" из формулы (III, 2; 34), которая сама некорректна.

Предложение 7. *Пусть S_j и T_j — две последовательности распределений, зависящих от целочисленного индекса j, пусть S_j и T_j при $j\to\infty$ стремятся (в $\mathscr{D}'$) соответственно к распределениям S и T и пусть, наконец, носители S_j и T_j содержатся в фиксированных замкнутых множествах A и B пространства R^n, обладающих тем*

свойством, что сумма $\xi+\eta$ с $\xi \in A$ и $\eta \in B$ может оставаться ограниченной, только когда оба переменных ξ и η ограничены. Тогда свертка $S_j * T_j$ стремится к $S*T$ при $j \to \infty$ (непрерывность свертки).

Мы примем эгу теорему без доказательства.

Мы видели, в частности, что распределение δ можно получить как предел (в $\mathscr{D}'$) бесконечно дифференцируемых функций α; тогда распределение $T = T*\delta$ будет пределом своих регуляризант $T*\alpha$. Можно, в частности, показать, что существуют последовательности *полиномов* α, сходящиеся к δ; тогда распределение T с ограниченным носителем будет пределом последовательности полиномов $T*\alpha$; это — формулировка теоремы Вейерштрасса:

Всякое распределение является пределом (в $\mathscr{D}'$) некоторой последовательности полиномов.

Предложение 8. *Если носители распределений S и T содержатся в A и $B \subset R^n$, то носитель свертки $S*T$ содержится в $\overline{A+B}$ — замыкании множества точек вида $\xi+\eta$, $\xi \in A$, $\eta \in B$.*

Чтобы убедиться в этом, мы покажем, что

$$\langle S*T, \varphi\rangle = 0,$$

если носитель K функции φ содержится в дополнении Ω множества $\overline{A+B}$.

Имеем

$$\langle S*T, \varphi\rangle = \langle S_\xi \otimes T_\eta, \varphi(\xi+\eta)\rangle.$$

Носитель $S_\xi \otimes T_\eta$ содержится в $A_\xi \times B_\eta$ — множестве пар (ξ, η) с $\xi \in A$, $\eta \in B$; носитель $\varphi(\xi+\eta)$ представляет собой множество таких пар (ξ, η), что $\xi+\eta \in K$.

Пересечение этих двух носителей пусто, ибо из $\xi \in A$ и $\eta \in B$ следует, что $\xi+\eta \in A+B$, но ведь $A+B$ и K имеют пустое пересечение.

Таким образом, рассматриваемое скалярное произведение равно нулю. Поскольку множество Ω открыто (множество $\overline{A+B}$ замкнуто), мы доказали, что $S*T=0$ в Ω и, значит, носитель $S*T$ заведомо лежит в $\overline{A+B}$.

Вывод. *Если носители S и T ограничены, то ограничен и носитель $S*T$; если (при $n=1$) носители S и T ограничены слева и лежат соответственно на лучах $(a, +\infty)$ и $(b, +\infty)$, то носитель $S*T$ лежит на луче $(a+b, \infty)$; если (при $n=4$) носители S и T лежат в волновом конусе будущего $t \geqslant 0$, $t^2-x^2-y^2-z^2$, то в нем же лежит и носитель $S*T$.*

2. Определение свертки нескольких распределений. Ассоциативность свертки. Пусть R, S, T — три распределения в R^n с носителями A, B, C.

Свертка $R*S*T$ этих распределений определяется формулой

$$\langle R*S*T, \varphi\rangle = \langle R_\xi \otimes S_\eta \otimes T_\zeta, \varphi(\xi+\eta+\zeta)\rangle. \qquad \text{(III, 2; 42)}$$

Она имеет смысл, если сумма $\xi+\eta+\zeta$ при $\xi\in A$, $\eta\in B$, $\zeta\in C$ может оставаться ограниченной, только когда все три переменных ξ, η, ζ остаются ограниченными. Ассоциативность тензорного произведения [формула (III, 1; 13)] приводит к ассоциативности свертки

$$R*S*T = (R*S)*T = R*(S*T). \qquad \text{(III, 2; 43)}$$

Однако *два последних выражения могут иметь смысл и не быть равными*, если носители A, B, C не обладают указанным выше свойством; *свертка является ассоциативной, только если* $R*S*T$, *определенная формулой* (III, 2; 42), *имеет смысл.*

Пример 1. $1*\delta'*Y$, где Y — функция Хевисайда

$$\begin{aligned}(1*\delta')*Y &= 0*Y = 0,\\ 1*(\delta'*Y) &= 1*\delta = 1.\end{aligned} \qquad \text{(III, 2; 44)}$$

Формула (III, 2; 43) имеет следующие приложения.

Предложение 9. *Свертка нескольких распределений имеет смысл и является ассоциативной и коммутативной в любом из следующих случаев*:

1) *все распределения, за исключением самое большее одного, имеют ограниченные носители*;

2) $n=1$, *носители всех распределений ограничены слева*;

3) $n=4$, *носители всех распределений лежат в полупространстве* $t\geqslant 0$, *и, кроме того, все носители, за исключением самое большее одного, лежат в волновом конусе будущего*: $t\geqslant 0$, $t^2-x^2-y^2-z^2$.

Предложение 10. *Для того чтобы сдвинуть или продифференцировать свертку, достаточно сдвинуть или продифференцировать любой из сомножителей.*

Докажем это для дифференцирования:

$$(S*T)' = \delta'*(S*T) = \delta'*S*T = (\delta'*S)*T = S'*T \qquad \text{(III, 2; 45)}$$

и также $= S*\delta'*T = S*(\delta'*T) = S*T'$.

Это остается, естественно, справедливым, если заменить дифференцирование произвольным дифференциальным оператором D с постоянными коэффициентами:

$$D(S*T) = DS*T = S*DT, \qquad \text{(III, 2; 46)}$$

Приложения к теории ньютоновского потенциала ($n = 3$)

Потенциал U распределения зарядов с непрерывной плотностью $\rho(x)$ задается формулой

$$U(x) = \iiint_{R^3} \frac{\rho(t)}{|x - t|} dt, \qquad \text{(III, 2; 47)}$$

где $|\xi|$ обозначает евклидово расстояние точки ξ от начала координат. Эта формула представляет собой не что иное, как свертку:

$$U = \rho * \frac{1}{|x|} = \rho * \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad \text{(III, 2; 48)}$$

Это наводит на мысль определить потенциал произвольного распределения T формулой

$$U = T * \frac{1}{r}. \qquad \text{(III, 2; 49)}$$

Естественно, что подобный потенциал сам будет являться некоторым распределением и не обязательно будет функцией.

Вычислим ΔU. Согласно (III, 2; 46), имеем

$$\Delta U = T * \Delta \frac{1}{r} = T * (-4\pi\delta) = -4\pi T. \qquad \text{(III, 2; 50)}$$

Итак, мы получили формулу Пуассона.

Предложение 11 (Формула Пуассона).

Пусть $U = T * \frac{1}{r}$ — потенциал некоторого распределения T. Тогда

$$\Delta U = -4\pi T. \qquad \text{(III, 2; 51)}$$

Предложение к теории вероятностей (для простоты $n = 1$)

В теории вероятностей вещественную случайную величину задают ее *распределением вероятностей*. Если это распределение является (локально суммируемой) функцией $f(x)$, то вероятность того, что величина находится в интервале (a, b), равна

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

При этом функция $f(x)$ обязательно $\geqslant 0$, обязательно суммируема и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$$

Однако такое распределение, как $\delta_{(a)}$, также задает вероятностный закон, при котором значение $x = a$ принимается ***наверняка***. Распределение, подобное

$$\frac{1}{3}\delta_{(a)} + \frac{2}{3}\delta_{(b)},$$

задает вероятностный закон, при котором величина x принимает только два значения $x = a$ $\left(\text{с вероятностью } \frac{1}{3}\right)$ и $x = b$ $\left(\text{с вероятностью } \frac{2}{3}\right)$.

Распределение T задает некоторый вероятностный закон тогда и только тогда, когда оно неотрицательно (т. е. $\langle T, \varphi\rangle \geqslant 0$ при $\varphi \geqslant 0$) и имеет полную массу, равную $+1$ ($\langle T, 1\rangle = 1$).

(Если носитель T не ограничен, то a priori величина $\langle T, 1\rangle$ не имеет смысла. Для распределений $T \geqslant 0$ эту величину определяют как верхнюю грань чисел $\langle T, \varphi\rangle$ при $\varphi \in \mathscr{D}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$.)

Можно доказать, что вероятностный закон суммы двух независимых вещественных случайных величин с вероятностными законами, задаваемыми распределениями S и T, задается сверткой $S * T$. В теории вероятностей существенную роль играет следующее предложение, которое в силу данных определений очевидно.

Предложение 12. *Из* $S \geqslant 0$ и $T \geqslant 0$ *вытекает, что* $S * T \geqslant 0$. *Из* $\langle S, 1\rangle = 1$ *и* $\langle T, 1\rangle = 1$ *вытекает, что* $\langle S * T, 1\rangle = 1$.

3. Уравнения в свертках. Пусть $\mathscr{A}'$ — некоторая *сверточная алгебра*, иными словами, $\mathscr{A}'$ — такое векторное подпространство пространства $\mathscr{D}'$, что свертка двух или произвольного конечного числа распределений, принадлежащих $\mathscr{A}'$, всегда определена и принадлежит $\mathscr{A}'$. Эта свертка должна быть коммутативна и ассоциативна в $\mathscr{A}'$. Наконец, $\delta \in \mathscr{A}'$.

Распространенные примеры

1) $\mathscr{A}' = \mathscr{D}'(\Gamma)$ — сверточная алгебра *всех* распределений на окружности.

2) $\mathscr{A}' = \mathscr{E}'$ — сверточная алгебра распределений с ограниченным носителем в R^n.

3) $\mathscr{A}' = \mathscr{D}'_+$ — сверточная алгебра распределений с носителем на луче $x \geqslant 0$ $(n = 1)$.

4) Сверточная алгебра распределений в (пространстве-времени) R^4 с носителями в волновом конусе будущего:

$$t \geqslant 0, \quad t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geqslant 0.$$

Уравнением в свертках в сверточной алгебре называется уравнение вида

$$A * X = B, \tag{III, 2; 52}$$

где A — коэффициент уравнения, B — правая часть, а X — неизвестное. Распределения A и B принадлежат $\mathcal{A}'$, распределение X также ищется в $\mathcal{A}'$.

Предложение 13. *Пусть A дано. Для того чтобы уравнение* (III, 2, 52) *имело хотя бы одно решение при любой правой части B, необходимо и достаточно, чтобы распределение A имело обратный элемент в алгебре $\mathcal{A}'$, т. е. чтобы существовал элемент A^{-1}, удовлетворяющий соотношениям*

$$A * A^{-1} = A^{-1} * A = \delta. \qquad \text{(III, 2; 53)}$$

В этом случае обратный элемент единствен и уравнение (III, 2; 52) *всегда имеет одно и только одно решение*:

$$X = A^{-1} * B. \qquad \text{(III, 2; 54)}$$

В самом деле, если уравнение (III, 2; 52) при любом B имеет хотя бы одно решение, то оно имеет хотя бы одно решение при $B = \delta$ и, значит, распределение A имеет обратное распределение A^{-1}. Предположим, напротив, что A имеет обратный A^{-1}. Тогда, свертывая обе части равенства (III, 2; 52) с A^{-1}, получим

$$A^{-1} * A * X = A^{-1} * B, \qquad \text{(III, 2; 55)}$$

т. е. соотношение (III, 2; 54). Аналогично из (III, 2; 54) можно вывести (III, 2; 52), свернув обе части с A.

Итак, если A^{-1} существует, то соотношение (III, 2; 54) эквивалентно соотношению (III, 2; 52); иными словами, уравнение (III, 2; 52): имеет единственное решение, даваемое формулой (III, 2; 54); в частности, обратный элемент для A единствен, поскольку он является решением уравнения (III, 2; 52) при $B = \delta$.

Элемент A^{-1} называют также элементарным решением уравнения в свертках (III, 2; 52).

Таким образом, отыскание элементарного решения является основной задачей при решении рассматриваемого уравнения.

Замечания. 1) Положение совершенно меняется, если мы не находимся в сверточной алгебре. Пусть, например, $A = \Delta\delta$ в R^3. Тогда существует обратное распределение $A^{-1} = -\frac{1}{4\pi r}$; однако носителем A^{-1} служит все пространство, а $\mathcal{D}'$ не является сверточной алгеброй. Соотношения (III, 2; 52) и (III; 2; 54) уже не эквивалентны. Из (III, 2; 52) нельзя уже, например, вывести (III, 2; 54), ибо если свернуть обе части с A^{-1}, то левая часть

$A^{-1} * A * X$ не будет иметь смысла, если носитель X не ограничен. Таким образом, можно только утверждать, что если X имеет ограниченный носитель (в этом случае носитель B также ограничен) и если X удовлетворяет уравнению (III, 2; 52), то X дается формулой (III, 2; 54). Доказать единственность решения уравнения (III, 2; 52) невозможно; впрочем, эта единственность и не имеет места, ибо однородное уравнение

$$\Delta\delta * X = 0, \quad \text{или} \quad \Delta X = 0,$$

имеет бесконечно много решений. Этими решениями служат „гармонические распределения" и, в частности, обычные гармонические функции.

Аналогично соотношение (III, 2; 54) имеет смысл, только если носитель B ограничен; в этом случае из (III, 2; 54), разумеется, следует соотношение (III, 2; 52); таким образом, при ограниченном носителе B наверняка существует частное решение

$$X = -\frac{1}{4\pi r} * B$$

уравнения $\Delta X = B$. (Это решение согласуется с формулой Пуассона.) Общее решение имеет вид

$$X = -\frac{1}{4\pi r} * B + \text{гармоническое распределение.}$$

Если носитель B не ограничен, то данный метод не позволяет доказать существование решения.

2) Если A не имеет обратного A^{-1}, то уравнение (III, 2; 52) не имеет решения при $B = \delta$. Однако при некоторых других B оно может иметь решения; оно может иметь единственное решение или бесконечное число решений (разность двух таких решений служит решением однородного уравнения $A * X = 0$). Оба случая могут встретиться в алгебре $\mathscr{D}'(\Gamma)$ (пример 1)[1]); в $\mathscr{E}'$ и в $\mathscr{D}'_+$ всегда не более одного решения[2]). Если A — бесконечно дифференцируемая функция, то обратный элемент не может существовать, ибо в силу предложения 5 свертка $A * A^{-1}$ была бы бесконечно дифференцируемой функцией и не могла бы равняться δ.

---

[1]) Если $f(s)$ — произвольная суммируемая функция на окружности с $\int_\Gamma f(s)\,ds = 0$, то $f * 1 = \int_\Gamma f(s-t)\,dt = 0$. — *Прим. перев.*

[2]) В случае функций — это теорема Титчмарша; ст. Микусинский Я., Операторное исчисление, ИЛ, М., 1956. — *Прим. перев.*

Предложение 14. *Пусть D — дифференциальный оператор порядка m с постоянными коэффициентами ($n=1$, одно переменное) и со старшим коэффициентом* 1:

$$D=\frac{d^m}{dx^m}+a_1\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}+\ldots+a_{m-1}\frac{d}{dx}+a_m. \qquad \text{(III, 2; 56)}$$

Распределение $D\delta$ обратимо в $\mathcal{D}'_+$; обратным элементом служит произведение YZ, где Y — функция Хевисайда, а Z — решение однородного уравнения $DZ=0$, удовлетворяющее „начальным условиям“:

$$Z(0)=Z'(0)=\ldots=Z^{(m-2)}(0)=0, \quad Z^{(m-1)}(0)=1. \qquad \text{(III, 2; 57)}$$

В самом деле, поскольку функция YZ имеет разрывы производных в начале координат, ее производные можно вычислять по известному методу. Впрочем, можно также дифференцировать YZ по правилу дифференцирования произведения, поскольку Z бесконечно дифференцируема:

$$\left.\begin{aligned}
(YZ)'&=YZ'+\delta Z(0),\\
(YZ)''&=YZ''+\delta Z'(0)+\delta' Z(0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(YZ)^{(m-1)}&=YZ^{(m-1)}+\delta Z^{(m-2)}(0)+\ldots+\delta^{(m-2)}Z(0),\\
(YZ)^{(m)}&=YZ^{(m)}+\delta Z^{(m-1)}(0)+\ldots+\delta^{(m-1)}Z(0).
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(III, 2; 58)}$$

Если учесть начальные условия для Z, то эти равенства примут вид

$$\left.\begin{aligned}
(YZ)^k&=YZ^{(k)} \quad \text{при} \quad k\leqslant m-1,\\
(YZ)^m&=YZ^{(m)}+\delta.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(III, 2; 59)}$$

Отсюда

$$D\delta*(YZ)=D(YZ)=YDZ+\delta, \qquad \text{(III, 2; 60)}$$

и поскольку Z является решением однородного уравнения $DZ=0$, имеем

$$D(YZ)=\delta. \qquad \text{(III, 2; 61)}$$

Ч. и т. д.

Примеры и следствия

Элементарным решением для оператора

$$D=\frac{d}{dx}-\lambda \qquad (\lambda\text{ — произвольное комплексное число})$$

служит

$$(\delta'-\lambda\delta)^{-1}=Y(x)e^{\lambda x}. \qquad \text{(III, 2; 62)}$$

Элементарным решением для

$$D = \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 \qquad (\omega \text{ — вещественное})$$

служит

$$(\delta'' + \omega^2\delta)^{-1} = Y(x)\frac{\sin \omega x}{\omega}. \qquad \text{(III, 2; 63)}$$

Элементарным решением для

$$D = \left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)^m$$

служит

$$(\delta' - \lambda\delta)^{-m} = Y(x)\, e^{\lambda x} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}. \qquad \text{(III, 2; 64)}$$

В качестве приложения найдем решение (*в смысле теории функций*) уравнения

$$Dz = f, \qquad \text{(III, 2; 65)}$$

где оператор D задан формулой (III, 2; 56), а f — данная функция. Начальные условия:

$$z^{(k)}(0) = z_k \text{ — данные числа}, \quad k \leqslant m - 1. \qquad \text{(III, 2; 66)}$$

Найдем функцию Yz. Она принадлежит $\mathcal{D}'_+$ и удовлетворяет (в смысле теории распределений) уравнениям (III, 2; 58), откуда вытекает, что

$$D(Yz) = YDz + \sum_{k=0}^{m-1} e_k \delta^{(k)}, \qquad \text{(III, 2; 67)}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &Dz = f, \\ &e_k = z_{m-1-k} + a_1 z_{m-2-k} + \ldots + a_{m-k-1} z_0 \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(III, 2; 68)}$$

Отсюда, положив $(D\delta)^{-1} = YZ$, получаем искомое решение:

$$Yz = YZ * \left(Yf + \sum_{k=0}^{m-1} e_k \delta^{(k)}\right), \qquad \text{(III, 2; 69)}$$

то есть, при $x \geqslant 0$, функцию

$$z(x) = \int_0^x Z(x-t)\, f(t)\, dt + \sum_{k=0}^{m-1} e_k Z^{(k)}. \qquad \text{(III, 2; 70)}$$

Итак, частное решение Z уравнения $DZ = 0$, удовлетворяющее начальным условиям (III, 2; 57), позволяет решить неоднородное уравнение с произвольной правой частью f и с произвольными начальными условиями.

Чтобы найти z при $x \leqslant 0$, следует рассуждать в $\mathscr{D}'_{-}$ — алгебре распределений с носителем на луче $(-\infty, 0)$ — и отыскивать $-Y(-x)z$. Элементарным решением здесь служит $-Y(-x)Z$; в формулах (III, 2; 58) следует всюду заменить $Y(x)$ на $-Y(-x)$, ту же замену следует произвести в формулах (III, 2; 69); все это в конечном итоге дает при $x \leqslant 0$ ту же самую формулу (III, 2; 70).

Впрочем, дифференцирование под знаком $\int$ непосредственно показывает, что функция $z(x)$, заданная формулой (III, 2; 70), является решением уравнения (III, 2; 65) с начальными условиями (III, 2; 66). В самом деле (*дифференцирование производится в обычном смысле*),

$$\frac{d}{dx}\int_0^x Z(x-t)f(t)\,dt = \int_0^x Z'(x-t)f(t)\,dt + Z_0 f(x) = \int_0^x Z'(x-t)f(t)\,dt, \qquad \text{(III, 2; 71)}$$

поскольку $Z_0 = 0$. Аналогично

$$\frac{d^k}{dx^k}\int_0^x Z(x-t)f(t)\,dt = \int_0^x Z^{(k)}(x-t)f(t)\,dt, \qquad k \leqslant m-1,$$

$$\frac{d^m}{dx^m}\int_0^x Z(x-t)f(t)\,dt = \int_0^x Z^m(x-t)f(t)\,dt + f(x). \qquad \text{(III, 2; 72)}$$

Отсюда

$$D\int_0^x Z(x-t)f(t)\,dt = \int_0^x DZ(x-t)f(t)\,dt + f(x) = f(x), \qquad \text{(III, 2; 73)}$$

поскольку $DZ = 0$.

Учитывая, что производные $Z^{(k)}$ удовлетворяют тому же уравнению, что и сама функция Z:

$$D\left(Z^{(k)}\right) = 0, \qquad \text{(III, 2; 74)}$$

окончательно имеем

$$Dz = f. \qquad \text{(III, 2; 75)}$$

Остается проверить, что z удовлетворяет также требуемым начальным условиям. Этого мы не будем проделывать.

Предложение 15. *Если A_1 и A_2 обратимы в алгебре $\mathcal{D}'_+$, то свертка $A_1 * A_2$ также обратима и ее обратный элемент равен*

$$(A_1 * A_2)^{-1} = A_1^{-1} * A_2^{-1}. \qquad \text{(III, 2; 76)}$$

В самом деле, имеем

$$(A_1 * A_2) * (A_1^{-1} * A_2^{-1}) = (A_1 * A_1^{-1}) * (A_2 * A_2^{-1}) = \delta * \delta = \delta. \qquad \text{(III, 2; 77)}$$

Применение. Пусть D — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами (III, 2; 56). Полином

$$P(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1} z + a_m \qquad \text{(III, 2; 78)}$$

разлагается на множители

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_m), \qquad \text{(III, 2; 79)}$$

где z_j не обязательно различны. Отсюда

$$D = \left(\frac{d}{dx} - z_1\right)\left(\frac{d}{dx} - z_2\right) \ldots \left(\frac{d}{dx} - z_m\right) \qquad \text{(III, 2; 80)}$$

или

$$D\delta = (\delta' - z_1\delta) * (\delta' - z_2\delta) * \ldots * (\delta' - z_m\delta). \qquad \text{(III, 2; 81)}$$

Теперь можно утверждать, что $(D\delta)^{-1}$ существует и, если учесть формулу (III, 2; 62), дается формулой

$$(D\delta)^{-1} = Y(x)\, e^{z_1 x} * Y(x) e^{z_2 x} * \ldots * Y(x)\, e^{z_m x}. \qquad \text{(III, 2; 82)}$$

В частности,

$$(\delta' - \lambda\delta)^{-m} = Y(x)\, e^{\lambda x} * Y(x) e^{\lambda x} * \ldots * Y(x)\, e^{\lambda x} = Y(x)\, e^{\lambda x} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \qquad \text{(III, 2; 83)}$$

согласно формуле (III, 2; 13). Мы вновь пришли к формуле (III, 2; 64).

Символическое исчисление Хевисайда

В алгебре $\mathcal{D}'_+$, как и во всякой алгебре с единицей, можно производить разложение рациональной дроби на простейшие. Обозначим буквой p элемент δ' алгебры $\mathcal{D}'_+$, элемент δ обозначим 1. Если λ — скаляр, то λ или $\lambda 1$ будет обозначать элемент $\lambda\delta$. Пусть надо найти обратный элемент $(D\delta)^{-1}$, где D — дифференциальный оператор (III, 2; 56). Воспользуемся разложением (III, 2; 79), сгруппировав его члены по совпадающим корням:

$$P(z) = \prod_j (z - z_j)^{k_j}. \qquad \text{(III, 2; 84)}$$

Нам надо найти в алгебре $\mathcal{D}'_+$ элемент, обратный произведению $\prod_j (p - z_j)^{k_j}$.

Разложение на простейшие дроби дает

$$\frac{1}{\prod\limits_j (p-z_j)^{k_j}} = \sum_j \left\{ \frac{c_{j,\,k_j}}{(p-z_j)^{k_j}} + \ldots + \frac{c_{j,\,1}}{(p-z_j)} \right\}. \qquad \text{(III, 2; 85)}$$

Но ведь

$$\frac{1}{(p-z_j)^{k_j}} = Y(x)\, e^{z_j x} \frac{x^{k_j-1}}{(k_j-1)!}. \qquad \text{(III, 2; 86)}$$

Таким образом, элемент $(D\delta)^{-1}$ можно выразить через известные функции. В качестве примера получим снова формулу (III, 2; 63), отправляясь от (III, 2; 62). Элемент, обратный $\delta'' + \omega^2\delta$, записывается в виде

$$\frac{1}{p^2+\omega^2},$$

но

$$\frac{1}{p^2+\omega^2} = \frac{1}{2\omega i}\left(\frac{-1}{p+\omega i} + \frac{1}{p-\omega i} \right), \qquad \text{(III, 2; 87)}$$

откуда

$$(\delta'' + \omega^2\delta)^{-1} = \frac{1}{2\omega i}\left(-Y(x)\, e^{-i\omega x} + Y(x)\, e^{i\omega x}\right) = Y(x)\frac{\sin \omega x}{\omega}. \qquad \text{(III, 2; 88)}$$

В качестве другого примера решим интегральное уравнение

$$\int\limits_0^x \cos(x-t)\, f(t)\, dt = g(x), \qquad \text{(III, 2; 89)}$$

где функция g — дана, f — неизвестна, $x \geqslant 0$. Это уравнение переписывается так:

$$Y(x) \cos x * f = g. \qquad \text{(III, 2; 90)}$$

Функция $Y(x)\cos x = Y(x)\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ в алгебре $\mathscr{D}'_+$ записывается в виде

$$Y(x)\cos x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i} \right) = \frac{p}{p^2+1}. \qquad \text{(III, 2; 91)}$$

Обратным элементом в $\mathscr{D}'_+$ будет

$$\frac{p^2+1}{p} = p + \frac{1}{p} = \delta' + Y(x). \qquad \text{(III, 2; 92)}$$

Впрочем, это можно проверить:

$$Y(x)\cos x * (\delta' + Y) = (Y\cos x)' + Y\cos x * Y =$$

$$= (-Y(x)\sin x + \delta) + Y(x)\int_0^x \cos t\,dt = \delta. \qquad \text{(III, 2; 93)}$$

Решение уравнения (III, 2; 90) запишется тогда в виде

$$f = g * (\delta' + Y) = g' + Y(x)\int_0^x g(t)\,dt. \qquad \text{(III, 2; 94)}$$

Производная g' должна, естественно, браться в смысле теории распределений. Следовательно, уравнение (III, 2; 90) имеет в качестве решения функцию только тогда, когда g' является функцией.

Интегральные уравнения Вольтерра

Рассмотрим при $x \geqslant 0$ уравнение

$$f(x) + \int_0^x K(x-t)\,f(t)\,dt = g(x), \qquad \text{(III, 2; 95)}$$

правая часть g и ядро K которого являются данными локально-суммируемыми *функциями*, а решение f — неизвестная функция. Если мы продолжим функции f, g и K нулем на отрицательную полуось $x < 0$, то мы получим уравнение в свертках типа (III, 2; 52) в алгебре $\mathscr{D}'_+$, в котором $A = \delta + K$, $X = f$, $B = g$.

Предложение 16. *Элемент $A = \delta + K$ обратим в алгебре $\mathscr{D}'_+$, какова бы ни была функция $K \in \mathscr{D}'_+$, его обратный имеет вид $\delta + H$, где H — некоторая функция из $\mathscr{D}'_+$.*

Мы ограничимся доказательством этого предложения для случая, когда функция K не только локально суммируема, но и локально ограничена, т. е. ограничена на любом конечном интервале. Положим символически, как на стр. 147, $\delta = 1$, $K = q$. Нам нужно обратить $1 + q$. В качестве обратного элемента естественно взять ряд $1 - q + q^2 + \ldots + (-1)^n q^n + \ldots$, если этот ряд сходится. Это сводится к вычислению ряда

$$E = \delta - K + K^{*2} + \ldots + (-1)^n K^{*n} + \ldots, \qquad \text{(III, 2; 96)}$$

где K^{*n} обозначает свертку n функций, равных K.

Покажем, что этот ряд сходится в $\mathscr{D}'_+$; все члены этого ряда, за исключением первого члена δ, являются функциями, и поэтому достаточно показать,

что на всяком конечном интервале $(0, a)$ функция K^{*n} мажорируется по модулю общим членом сходящегося числового ряда. Обозначим M_a максимум модуля функции $K(x)$ на интервале $0 \leqslant x \leqslant a$. При $0 \leqslant x \leqslant a$ имеем

$$|K^{*2}(x)| = \left| \int_0^x K(x-t) K(t)\, dt \right| \leqslant x M_a^2. \qquad \text{(III, 2; 97)}$$

Вообще предположим, что при $0 \leqslant x \leqslant a$ уже доказана оценка:

$$\left| K^{*(n-1)}(x) \right| \leqslant \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} M_a^{n-1}. \qquad \text{(III, 2; 98)}$$

Тогда

$$|K^{*n}(x)| = \left| \int_0^x K^{*(n-1)}(t) K(x-t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant M_a^n \int_0^x \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\, dt = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} M_a^n. \qquad \text{(III, 2; 99)}$$

Таким образом, мы доказали индукцией по n, что при $0 \leqslant x \leqslant a$ имеет место равномерная оценка

$$|K^{*n}(x)| \leqslant M_a^n \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}, \qquad \text{(III, 2; 100)}$$

правая часть которой — общий член сходящегося ряда.

Остается показать, что вычисленное таким способом распределение E удовлетворяет уравнению $A * E = \delta$; поскольку свертывание можно производить почленно (предложение 7), это сводится к проверке формулы

$$(1+q)(1-q+q^2+ \ldots +(-1)^n q^n + \ldots) = 1, \qquad \text{(III, 2; 101)}$$

где по-прежнему $\delta = 1$, $K = q$. Эта формула очевидна.

Окончательно если положить

$$-H = K - K^{*2} + K^{*3} + \ldots + (-1)^{n-1} K^{*n} + \ldots, \qquad \text{(III, 2; 102)}$$

то

$$A^{-1} = \delta + H.$$

H является функцией (равной нулю при $x < 0$). Если функция K непрерывна, то H будет непрерывной функцией, как сумма равномерно сходящегося

на любом конечном интервале $(0, a)$ ряда из непрерывных функций. Решение уравнения (III, 2; 95) дается формулой

$$f = A^{-1} * g = (\delta + H) * g$$

или

$$f(x) = g(x) + \int_0^x H(x-t)\, g(t)\, dt. \qquad \text{(III, 2; 103)}$$

Решение f выражается через правую часть g формулой, аналогичной формуле, которая выражает g через f.

Замечания

1) Уравнение (III, 2; 95) называется интегральным уравнением второго рода. Уравнение первого рода выглядит так:

$$\int_0^x K(x-t)\, f(t)\, dt = g(x); \qquad \text{(III, 2; 104)}$$

оно также является уравнением в свертках, но на этот раз $A = K$. Ситуация здесь совершенно иная. Может вполне оказаться, что обратный элемент A^{-1} не существует (например, если K, всегда продолжаемая нулем при $x < 0$, является бесконечно дифференцируемой функцией; в самом деле, предложение 5 показывает, что, каково бы ни было $E \in \mathcal{D}'_+$, свертка $K * E$ будет бесконечно дифференцируемой функцией и не сможет равняться δ).

Если даже элемент A^{-1} существует, то он является только распределением и никогда не может быть функцией (ибо если бы E было функцией, то свертка $K * E$ также была бы функцией и не могла бы равняться δ); следовательно, f никогда не выражается через g так, как g выражается через f. Например, если K — функция $Y(x)\dfrac{x^{m-1}}{(m-1)!}$, то формула (III, 2; 64) показывает, что $A^{-1} = \delta^{(m)}$.

2) Существуют интегральные уравнения Вольтерра, которые не являются уравнениями в свертках; таково, например, общее уравнение второго рода:

$$f(x) + \int_0^x K(x, \xi)\, f(\xi)\, d\xi = g(x), \qquad \text{(III, 2; 105)}$$

где K — непрерывная функция двух переменных x и ξ при $x \geqslant 0$, $0 \leqslant \xi \leqslant x$.

Здесь полагают

$$\left.\begin{aligned} K^{(2)}(x, \xi) &= \int_{\xi}^{x} K(x, \eta) K(\eta, \xi)\, d\eta, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K^{(n)}(x, \xi) &= \int_{\xi}^{x} K^{(n-1)}(x, \eta) K(\eta, \xi)\, d\eta, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III, 2; 106)}$$

и

$$-H(x, \xi) = K(x, \xi) - K^{(2)}(x, \xi) + \ldots + (-1)^{n-1} K^{(n)}(x, \xi) + \ldots \qquad \text{(III, 2; 107)}$$

(ряд, равномерно сходящийся при $0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant a$). Решение уравнения (III, 2; 105) дается формулой

$$f(x) = g(x) + \int_{0}^{x} H(x, \xi) g(\xi)\, d\xi. \qquad \text{(III, 2; 108)}$$

Системы уравнений в свертках Система n уравнений в свертках с n неизвестными распределениями имеет вид

$$\left.\begin{aligned} A_{11} * X_1 + A_{12} * X_2 + \ldots + A_{1n} * X_n &= B_1, \\ A_{21} * X_1 + A_{22} * X_2 + \ldots + A_{2n} * X_n &= B_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n1} * X_1 + A_{n2} * X_2 + \ldots + A_{nn} * X_n &= B_n, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III, 2; 109)}$$

где A_{ij} — коэффициенты, B_i — правые части, X_i — неизвестные; все эти элементы лежат в некоторой сверточной аглебре $\mathcal{A}'$.

Предложение 17. *Для того чтобы система* (III. 2; 109), *с данными коэффициентами* A_{ij}, *имела хотя бы одно решение при любых правых частях* B_i, *необходимо и достаточно, чтобы сверточный определитель* Δ *из коэффициентов* A_{ij} *имел обратный элемент в* $\mathcal{A}'$. *Этот обратный элемент является тогда единственным, и система* (III, 2; 109) *имеет единственное решение при любых правых частях. Это решение дается формулами*

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= C_{11} * B_1 + C_{12} * B_2 + \ldots + C_{1n} * B_n, \\ X_2 &= C_{21} * B_1 + C_{22} * B_2 + \ldots + C_{2n} * B_n, \\ \ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n &= C_{n1} * B_1 + C_{n2} * B_2 + \ldots + C_{nn} * B_n, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III, 2; 110)}$$

где распределения C_{ij} образуют матрицу (C), обратную матрице (A) коэффициентов A_{ij}.

Произведения, которые входят в вычисление определителей, естественно, должны пониматься как свертки. Например, определитель $\begin{vmatrix} L & M \\ P & Q \end{vmatrix}$ понимается как $L * Q - M * P$.

В матричной форме система (III, 2; 109) записывается так:

$$(A) * (X) = (B), \qquad \text{(III, 2; 111)}$$

где (A) — матрица коэффициентов A_{ij}, а (X) и (B) — матрицы-столбцы с n строками:

$$(X) = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{pmatrix}, \quad (B) = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_n \end{pmatrix}. \qquad \text{(III, 2; 112)}$$

1) Предположим, что при любой правой части существует хотя бы одно решение. Примем за (B) набор распределений $B_j = \delta$, $B_k = 0$ при $k \neq j$. Пусть $X_i = C_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — соответствующее решение; пусть, далее, индекс j принимает значения $1, 2, \ldots, n$. По определению, имеем

$$\sum_k A_{ik} * C_{kj} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ \delta, & \text{если } i = j, \end{cases} \qquad \text{(III, 2; 113)}$$

или, в матричной форме,

$$(A) * (C) = (\delta I), \qquad \text{(III, 2; 114)}$$

где (δI) — квадратная матрица, элементы на главной диагонали которой равны δ, а на остальных местах равны 0.

Отсюда получается соотношение для определителей

$$\det(A) * \det(C) = \det(\delta I) = \delta, \qquad \text{(III, 2; 115)}$$

которое показывает, что определитель $\Delta = \det(A)$ обратим в алгебре $\mathcal{A}'$.

2) Напротив, предположим, что Δ обратим, и пусть Δ^{-1} — обратный элемент.

Пусть a_{ij} — алгебраическое дополнение элемента A_{ij} в определителе матрицы (A).

Зададим матрицу (C) равенствами

$$C_{ij} = \Delta^{-1} * \alpha_{ji}. \qquad \text{(III, 2; 116)}$$

Стандартная выкладка с матрицами показывает, что

$$(A) * (C) = (C) * (A) = (\delta I). \qquad \text{(III, 2; 117)}$$

Пусть теперь (X) — некоторое решение уравнения (III, 2; 111); свертывая с (C) слева, получим

$$(C) * (B) = (C) * (A) * (X) = (\delta I) * (X) = (X) \qquad \text{(III, 2; 118)}$$

или

$$(X) = (C) * (B).$$

Обратно, если (X) удовлетворяет соотношению (III, 2; 118), то, свертывая это соотношение слева с (A), мы вернемся к соотношению (III, 2; 111).

Таким образом, соотношения (III, 2; 111) и (III, 2; 118) эквивалентны; иначе говоря, уравнение (III, 2; 111) имеет единственное решение, даваемое формулой (III, 2; 118); или, еще иначе, система уравнений (III, 2; 109) имеет единственное решение, даваемое формулами (III, 2; 110). Матрица (C) является обратной к матрице (A). Других обратных нет, ибо если свернуть соотношение

$$(A^{-1}) * (A) = (\delta I) \qquad \text{(III, 2; 119)}$$

с матрицей (C), то возникнет равенство

$$(A^{-1}) = (C). \qquad \text{(III, 2; 120)}$$

Эти построения приложимы, в частности, к электрическим системам. Разумеется, все, что здесь говорилось, не имеет никакого специфического отношения к свертке; эти правила справедливы во всякой коммутативной алгебре и являются не чем иным, как общими свойствами систем уравнений, матриц и определителей. Заметим, что, хотя алгебра $\mathcal{A}'$ коммутативна, свертка двух матриц с элементами из $\mathcal{A}'$ не является, вообще говоря, коммутативной.

§ 3. *Свертка в физике*

Рассмотрим в качестве примера электрический контур, содержащий сопротивления, индуктивности и емкости. Отправляясь от электродвижущей силы и тока, равных нулю, включим в некоторый начальный момент t_0 электродвижущую силу $e(t)$, известную при всех значениях $t \geqslant t_0$; тогда в контуре возникнет ток с силой $i(t)$; $i(t)$ будет определенной функцией при $t \geqslant t_0$.

Мы будем рассматривать $e(t)$ и $i(t)$ как функции, определенные при всех значениях t, но равные нулю при $t < t_0$. Таким образом, при всяком *воз-*

буждении, определяемом функцией $e(t)$, возникает ***отклик***, определяемый функцией $i(t)$; тем самым определен некоторый ***оператор***, который всякой функции $e(t)$ ставит в соответствие функцию $i(t)$. Этот оператор обладает следующими свойствами.

1) Он линеен. Если функции $e(t)$ соответствует $i(t)$, то функции $\lambda e(t)$ соответствует $\lambda i(t)$; если функциям $e_1(t)$ и $e_2(t)$ соответствуют $i_1(t)$ и $i_2(t)$, то сумме $e_1(t)+e_2(t)$ соответствует сумма $i_1(t)+i_2(t)$.

2) Он коммутирует со сдвигом во времени. (Это свойство выражает неизменность с течением времени изучаемой физической системы.) Это означает, что если функции $e(t)$ соответствует функция $i(t)$, то функции $e(t-t_1)$, получаемой сдвигом во времени, соответствует функция $i(t-t_1)$, получаемая тем же самым сдвигом во времени.

3) Если $e(t)$ равна нулю при $t<0$, то и $i(t)$ будет равна нулю при $t<0$; из свойства 2) вытекает тогда, что если $e(t)=0$ при $t<t_0$, то и $i(t)=0$ при $t<t_0$.

Из этих предположений обычно выводят интуитивным способом следующие заключения.

Примем за возбуждение $e(t)$ „функцию Дирака" $\delta(t)$. (В действительности это должно означать, что функция $e(t)$ очень велика, порядка $1/\varepsilon$, в течение очень короткого времени $0\leqslant t\leqslant\varepsilon$, а затем равна нулю.)

Обозначим через $A(t)$ отклик $i(t)$ контура. Эту величину называют ***импульсной переходной функцией*** (***импульсной реакцией***) или откликом системы на единичный импульс. Она представляет собой „функцию" от t, равную нулю при $t<0$ в силу предположения 3).

(Однако благодаря индуктивностям и емкостям она не обязана обращаться в нуль при $t>\varepsilon$ после выключения электродвижущей силы.)

Рассмотрим теперь такое же возбуждение, сдвинутое во времени $e(t)=\delta(t-\tau)$. Тогда, согласно 2), соответствующий отклик $i(t)$ будет равен $A(t-\tau)$. Произвольное возбуждение $e(t)$ является „интегральной линейной комбинацией" импульсных возбуждений $\delta(t-\tau)$:

$$e(t)=\int_0^t e(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau \qquad \text{(III, 3; 1)}$$

или

$$e=e*\delta.$$

Пользуясь линейностью 1), отсюда выводят, что $i(t)$ является такой же комбинацией откликов $A(t-\tau)$:

$$i(t)=\int_0^t e(\tau)\,A(t-\tau)\,d\tau \qquad \text{(III, 3; 2)}$$

или

$$i(t) = e(t) * A(t). \qquad \text{(III, 3; 3)}$$

Приведенное рассуждение является, очевидно, неудовлетворительным с точки зрения математики.

Во-первых, следовало бы указать, что оператор определен не только для функций, равных нулю при $t < 0$, но и для распределений из $\mathscr{D}'$ с носителями на полупрямой $(0 \leqslant t < \infty)$ и что такому распределению он ставит в соответствие распределение i, также принадлежащее $\mathscr{D}'_+$. Необходимо, наконец, добавить к трем предположениям еще предположение о непрерывности.

4) Если возбуждения e_j при $j \to \infty$ стремятся к возбуждению e (в смысле сходимости распределений), то отклики i_j, соответствующие e_j, стремятся к отклику i, соответствующему e.

В случае электродвижущей силы повод рассматривать распределения возник естественно. Этот повод возникает еще более естественно в случае силы тока. Пусть через прибор, измеряющий силу тока, в момент τ проходит элементарный ток, представляемый *одним зарядом* q. Сила тока есть производная от количества электричества по времени. Количество электричества равно $qY(t-\tau)$, т. е. равно 0 при $t < \tau$ и равно q при $t \geqslant \tau$; сила тока, таким образом, равна $q\delta(t-\tau)$. Кроме того, известно, что прохождение тока есть дискретное явление, которое представляет собой последовательное прохождение большого числа элементарных зарядов, что выглядит внешне как прохождение непрерывного тока.

Математическое доказательство формулы (III, 3; 3) производится теперь следующим образом.

По определению A, формула (III, 3; 3) справедлива для $e = \delta$; тогда в силу 2) она справедлива для $e = \delta(t-\tau)$; в силу линейности 1) она остается справедливой для конечной линейной комбинации импульсов

$$e(t) = \sum_k e_k \delta(t - \tau_k).$$

Наконец, она верна в силу непрерывности 4) для всякого e, которое является пределом (в $\mathscr{D}'_+$) конечных линейных комбинаций импульсов. Но ведь *можно доказать*, что всякое распределение из $\mathscr{D}'_+$ является пределом (в $\mathscr{D}'_+$) конечных линейных комбинаций точечных масс; следовательно, формула (III, 3; 3) верна для любого $e \in \mathscr{D}'_+$. Именно эта теорема о плотности лежит в основе записи формулы (III, 3; 2) и перехода от формулы (III, 3; 1) к (III, 3; 2). Именно ее имеют в виду, когда говорят, что всякий ток состоит из прохождений точечных зарядов или что всякое материальное тело образовано большим числом точечных масс.

Итак, импульсная реакция A определяет отклик на любое возбуждение по формуле (III, 3; 3).

В практическом случае, который мы и рассматриваем, при $t \geqslant 0$ имеет место формула

$$e(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau, \qquad \text{(III, 3; 4)}$$

где R, L, C суть сопротивление, индуктивность и емкость контура.

Эту формулу можно записать так:

$$e = Z * i, \qquad \text{(III, 3; 5)}$$

где

$$Z = R\delta + L\delta' + \frac{1}{C}Y. \qquad \text{(III, 3; 6)}$$

Распределение $Z(t)$ есть *импеданс* контура. Оно принадлежит $\mathscr{D}'_+$ и позволяет выразить e через i с помощью свертки. Распределение A, которое называют *адмитансом*, или *полной проводимостью*, является *обратным* к Z в сверточной алгебре $\mathscr{D}'_+$:

$$A = Z^{-1} \quad \text{или} \quad A * Z = \delta. \qquad \text{(III, 3; 7)}$$

Продифференцировав обе части, формулу (III, 3; 7) записывают также в виде

$$\left(L\delta'' + R\delta' + \frac{1}{C}\delta\right) * A = \delta'.$$

Таким образом, адмитанс A является функцией, которая равна нулю при $t < 0$ и совпадает при $t \geqslant 0$ с обычным решением однородного уравнения

$$Lu'' + Ru' + \frac{1}{C}u = 0$$

с начальными условиями

$$u(0) = \frac{1}{L}, \qquad u'(0) = -\frac{R}{L^2}.$$

Уравнение (III, 3; 7) получается из (III, 3; 5) при $e = \delta$ и $i = A$.

Как обычно, положим $\delta = 1$ (единица алгебры $\mathscr{D}'_+$), $\delta' = p$, $Y = 1/p$. Имеем

$$Z = R + Lp + \frac{1}{Cp} = \frac{Lp^2 + Rp + 1/C}{p} \qquad \text{(III, 3; 8)}$$

Отсюда

$$A = \frac{p}{Lp^2 + Rp + 1/C}. \qquad \text{(III, 3; 9)}$$

Корни знаменателя равны

$$p = -\frac{R}{2L} \pm \frac{\sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad \text{(III, 3; 10)}$$

(где $j = \sqrt{-1}$, как это принято в теории электричества).

Предположим, что R^2 мало по сравнению с L/C; тогда

$$p \approx -\frac{R}{2L} \pm \frac{j}{\sqrt{LC}}, \quad \text{(III, 3; 11)}$$

и мы имеем приближенное разложение дроби (III, 3; 9):

$$A \approx \frac{\frac{R}{2L} + \frac{j}{\sqrt{LC}}}{\frac{2jL}{\sqrt{LC}}\left(p + \frac{R}{2L} + \frac{j}{\sqrt{LC}}\right)} + \frac{-\frac{R}{2L} + \frac{j}{\sqrt{LC}}}{\frac{2jL}{\sqrt{LC}}\left(p + \frac{R}{2L} - \frac{j}{\sqrt{LC}}\right)}. \quad \text{(III, 3; 12)}$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{p-\lambda} = Y(t)\, e^{\lambda t}$$

и что R^2 мало по сравнению с L/C, получаем выражение

$$A(t) = \frac{Y(t)}{L} e^{-\frac{R}{2L}t} \cos 2\pi \frac{t}{T}, \quad \text{(III, 3; 13)}$$

где

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \quad \text{(III, 3; 14)}$$

— период собственных колебаний, а $e^{-\frac{R}{2L}t}$ — множитель, определяющий затухание.

Упражнение. ***Проделайте все выкладки, не пренебрегая R^2 по сравнению с L/C.***

Пример, который мы только что привели, является всего лишь очень специальным случаем общей ситуации. Всякий раз, когда некоторая функция или некоторое распределение i зависит от другой функции или другого распределения e и удовлетворяет предположениям 1), 2), 3) и 4), существует импульсная реакция A, такая, что $i = A * e$.

Примеры.

1) Можно поменять роли i и e. Можно принять i за возбуждение, а e — за отклик, тогда импульсной реакцией будет импеданс Z.

2) Отклик может совпадать с возбуждением; тогда $A = \delta$.

3) Возбуждение и отклик могут состоять из нескольких распределений или функций, например возбуждение $e_1(t)$, $e_2(t)$; отклик $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$. Это будет иметь место в случае сети, в которой действуют две электродвижущие силы и возникают три неизвестные силы тока. Здесь следует использовать матрицы. Имеет место формула

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 \\ A_2^1 & A_2^2 \\ A_3^1 & A_3^2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(III, 3; 15)}$$

которая означает, что

$$\begin{aligned} i_1 &= A_1^1 * e_1 + A_1^2 * e_2, \\ i_2 &= A_2^1 * e_1 + A_2^2 * e_2, \\ i_3 &= A_3^1 * e_1 + A_3^2 * e_2. \end{aligned} \qquad \text{(III, 3; 16)}$$

Импульсной реакцией является, таким образом, матрица, в данном случае с тремя строками и двумя столбцами. Смысл каждого из ее элементов очевиден; например, A_3^1 есть значение i_3 при $e_1 = \delta$, $e_2 = 0$.

4) Стержень AB — теплопроводен. Обмен теплом с внешней средой происходит только на концах стержня в точках A и B, где стержень соприкасается с источниками. В точке A, начиная с момента времени $t = 0$, он получает меняющееся со временем количество тепла. Пусть $e_1(t)$ — количество тепла, получаемое стержнем за единицу времени в момент t; тогда количество тепла, полученное от начального момента до момента t, будет равно

$$\int_0^t e_1(\tau)\, d\tau.$$

Аналогично определяется $e_2(t)$ для конца B. Мы хотим установить, как изменяется со временем температура стержня, если эта температура равнялась 0 при $t < 0$. Температура $U(x, t)$ в точке x в момент времени t при фиксированном x будет некоторой функцией t, которую можно рассматривать как отклик. Отсюда мы приходим к импульсным реакциям $A_1(t)$ и $A_2(t)$ (зависящим от x) и к формуле

$$U(x, t) = A_1 * e_1 + A_2 * e_2 =$$
$$= \int_0^t A_1(x, t-\tau)\, e_1(\tau)\, d\tau + \int_0^t A_2(x, t-\tau)\, e_2(\tau)\, d\tau. \qquad \text{(III, 3; 17)}$$

5) Та же самая задача возникает для волнового уравнения: резонанс полости при внешнем акустическом возбуждении, незатухающие колебания струны или воздуха в акустической трубе и т. п.

Различные замечания

1) Часто пытаются *определить* $A(t)$ *экспериментально*. Вместо единичного импульса $e(t)=\delta(t)$, который иногда трудно реализовать, берут в качестве возбуждения ступеньку Хевисайда $e(t)=Y(t)$. Тогда отклик будет равен

$$i = A * Y = \int_0^t A(\tau)\, d\tau;$$

реакцию A определяют дифференцированием $A=\frac{di}{dt}$. Но при этом надо следить за тем, чтобы дифференцирование производилось в смысле теории распределений.

С другой стороны, на практике, хотя Y и легче реализовать, чем δ, точно определить производную труднее, чем саму функцию.

2) Примем за возбуждение $e(t)=e^{pt}$. Подобное возбуждение автоматически, без расширения начальных условий, брать нельзя, поскольку функция e^{pt} не равна нулю при $t<0$. Тем не менее при $\mathrm{Re}\, p>0$ функция e^{pt} стремится к 0 при $t\to-\infty$ и оказывается, что мы имеем право сделать такой выбор. Тогда

$$i(t) = A * e^{pt} = e^{pt}\int_0^\infty e^{-p\tau} A(\tau)\, d\tau = \mathcal{A}(p)\, e^{pt}, \qquad \text{(III, 3; 18)}$$

т. е. отклик пропорционален возбуждению. Множителем пропорциональности является $\mathcal{A}(p)$; эту величину называют ***переходной функцией системы***[1]; $\mathcal{A}(p)$ является ***преобразованием Лапласа*** от A, что позволяет определить A, если $\mathcal{A}(p)$ известна при значениях p с достаточно большой вещественной частью.

Легко видеть математическую природу указанного выше ограничения: подобную процедуру можно применять, только если A имеет преобразование Лапласа. В рассмотренном ранее примере электрического контура величина $\mathcal{A}(p)$ равнялась

$$\frac{p}{Lp^2+Rp+1/C}.$$

---

[1]) В оригинале facteur de réponse isomorphe. — *Прим. перев.*

3) Примем за возбуждение $e(t)=e^{j\omega t}$, ω — вещественное. Здесь $e(t)$ снова не равна 0 при $t<0$; эта функция даже периодична и не стремится к 0 при $t \to -\infty$. Предположим тем не менее, что такое возбуждение допустимо. Тогда отклик

$$i(t)=A * e^{j\omega t}=e^{j\omega t}\int_0^\infty e^{-j\omega\tau}A(\tau)\,d\tau=\mathcal{A}(j\omega)\,e^{j\omega t} \qquad \text{(III, 3; 19)}$$

снова будет пропорционален возбуждению. Множитель пропорциональности $\mathcal{A}(j\omega)$ называется *частотной характеристикой системы* [1]; $\mathcal{A}(j\omega)$ является *преобразованием Фурье от* A, что позволяет определить A, если $\mathcal{A}(j\omega)$ известна при всех ω. Здесь математическая природа ограничений, накладываемых на задачу, следующая:

реакция A должна иметь преобразование Фурье, а это преобразование $\mathcal{A}(j\omega)$ должно быть функцией, поскольку оно должно иметь числовые значения при всех ω.

В классическом случае периодического переменного тока с частотой ω импеданс равен

$$Z(j\omega)=R+Lj\omega+\frac{1}{Cj\omega}, \qquad \text{(III, 3; 20)}$$

при этом

$$\mathcal{A}(j\omega)=\frac{1}{Z(j\omega)}$$

— величина, называемая адмитансом.

Поскольку в этих двух последних случаях возбуждение $e(t)$ не равнялось нулю при $t<0$, то же самое имеет место и для $i(t)$. При этом имеется бесконечно много различных возможных откликов на данное возбуждение (разность между любыми двумя такими откликами является откликом, соответствующим нулевому возбуждению) и следует указать, как выбрать один из этих откликов. Выбирают отклик, *пропорциональный* возбуждению (множителем пропорциональности служит $\mathcal{A}(p)$ или $\mathcal{A}(j\omega)$). Впрочем, на практике оказывается, что все отклики стремятся к выбранному при $t \to +\infty$.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ III

Упражнение III-1. Найти в $\mathcal{D}'_+$ распределения, обратные следующим:

$$\delta''-5\delta'+6\delta,$$
$$\dot{Y}+\delta'',$$
$$Y(x)\,e^x+\delta'.$$

[1] В оригинале facteur de réponse isochrone. — *Прим. перев.*

Упражнение III-2. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^x (x-\xi)\cos(x-\xi) f(\xi)\,d\xi = g(x),$$

где g — данная, а f — неизвестная функция с носителями на луче $(0, +\infty)$.

Упражнение III-3. Пусть $g(x)$ — функция с носителем на луче $(0, +\infty)$. Найти функцию $f(x)$ с носителем на луче $(0, +\infty)$, удовлетворяющую при $x \geqslant 0$ интегральному уравнению

$$\int_0^x (e^{-\xi} - \sin\xi) f(x-\xi)\,d\xi = g(x).$$

Какому условию должна удовлетворять функция g, для того чтобы решение было непрерывной функцией? Вычислить решение в случае, когда g является функцией Хевисайда $Y(x)$.

Упражнение III-4. Решить интегральное уравнение

$$f(x) + \int_0^x \cos(x-\xi) f(\xi)\,d\xi = g(x),$$

где g — данная, а f — неизвестная функция с носителями на луче $(0, +\infty)$.

Упражнение III-5. Обозначим через $f(t)$ то решение дифференциального уравнения

$$x''' + 2x'' + x' + 2x = -10\cos t,$$

которое удовлетворяет начальным условиям

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 2, \quad x''(0) = -4.$$

Положим

$$F(t) = Y(t) f(t),$$

где $Y(t)$ — функция Хевисайда. Написать дифференциальное уравнение в смысле теории распределений, которому удовлетворяет $F(t)$. Найти затем $F(t)$, используя символическое исчисление в $\mathscr{D}'_+$.

Упражнение III-6. Вычислить свертку

$$Y(x)\sin x * Y(x)\,\mathrm{sh}\,2x$$

Найти дифференциальный оператор D с постоянными коэффициентами, для которого эта свертка служит элементарным решением.

Найти решение дифференциального уравнения

$$y^{(4)} - 3y^{(2)} - 4y = 0,$$

которое удовлетворяет начальным условиям

$$y(0) = 1, \ y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0.$$

Упражнение III-7. Показать, что функции

$$e^{-|x|}; \ e^{-ax^2}, \ a > 0; \ xe^{-ax^2}, \ a > 0$$

принадлежат L^1.

Вычислить свертки

a) $e^{-|x|} * e^{-|x|}$,

b) $e^{-ax^2} * xe^{-ax^2}$,

c) $xe^{-ax^2} * xe^{-ax^2}$.

Упражнение III-8. Доказать формулу (III, 2; 23).

Упражнение III-9. Вычислить сверточные степени f^{*n} функции

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } -1 < x < 1, \\ 0 \text{ в остальных точках.} \end{cases}$$

Как можно было бы вывести этот результат из $(f')^{*n}$?

Каков носитель функции f^{*n}?

Упражнение III-10. На плоскости (x, y) рассматривается конус $0 < x < |y|$. Пусть f и g — две функции с носителями в этом конусе. Написать $(f * g)(u, v)$. Пусть Y — характеристическая функция конуса, вычислить $Y * Y$.

Упражнение III-11. Рассматривается распределение

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_{(n)}.$$

Пусть $E(x)$ — первообразная этого распределения с носителем на луче $(0, +\infty)$. Вычислить

$$E(x) * E(x).$$

Упражнение III-12. Решить в $\mathscr{D}'_+$ систему уравнений в свертках

$$\delta'' * X_1 + \delta' * X_2 = \delta,$$
$$\delta' * X_1 + \delta'' * X_2 = 0.$$

Упражнение III-13. Решить в $\mathscr{D}'_+$ систему уравнений в свертках

$$
\begin{aligned}
Y(x)\,e^{\alpha_1 x} * X_1 + Y(x)\,e^{\alpha_2 x} * X_2 + Y(x)\,e^{\alpha_3 x} * X_3 &= U_1,\\
Y(x)\,e^{\alpha_3 x} * X_1 + Y(x)\,e^{\alpha_1 x} * X_2 + Y(x)\,e^{\alpha_2 x} * X_3 &= U_2,\\
Y(x)\,e^{\alpha_2 x} * X_1 + Y(x)\,e^{\alpha_3 x} * X_2 + Y(x)\,e^{\alpha_1 x} * X_3 &= U_3,
\end{aligned}
$$

где U_1, U_2, U_3 — известные, а X_1, X_2, X_3 — неизвестные распределения из $\mathscr{D}'_+$.

Упражнение III-14. (Письменный экзамен, Париж, 1959.) Обозначим через $\mathscr{J}$ множество тех распределений на вещественной прямой, которые представимы в виде конечной суммы

$$\sum_{m,\,n} a_{m,\,n}\delta_{(n)}^{(m)}, \tag{1}$$

где

$$\sum_{n} a_{m,\,n} = 0 \tag{2}$$

($\delta_{(n)}^{(m)}$ есть m-я производная распределения, заданного единичной массой в точке n; m — целые числа $\geqslant 0$, n — целые числа произвольного знака).

Через $\mathscr{J}_1$ обозначим множество распределений вида $S_1 = \delta + S$, где $S \in \mathscr{J}$.

Показать, что распределение $S_1 \in \mathscr{J}_1$ тогда и только тогда, когда оно имеет вид (1) с очевидными изменениями в (2), которые следует выписать.

Первый вопрос: показать, что $\mathscr{J}$ является сверточной алгеброй (без единицы).

Второй вопрос: показать, что если T является периодическим распределением с периодом 1 (т. е. равно своему сдвигу $\tau_1 T$ при единичном сдвиге переменного), то

$$S * T = 0 \text{ при } S \in \mathscr{J} \text{ и } S_1 * T = T \text{ при } S_1 \in \mathscr{J}_1.$$

Пусть A — распределение с ограниченным носителем, и пусть существует такое распределение E с ограниченным носителем, что

$$A * E \in \mathscr{J}_1. \tag{3}$$

Показать в этом случае, что для периодического распределения B с периодом 1 существует, и притом единственное, периодическое распределение X с периодом 1, такое, что

$$A * X = B. \tag{4}$$

Третий вопрос: пусть D — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами:

$$D = \frac{d^N}{dx^N} + a_{N-1}\frac{d^{N-1}}{dx^{N-1}} + \ldots + a_2\frac{d^2}{dx^2} + a_1\frac{d}{dx} + a_0. \tag{5}$$

Показать, что функция $E(x)$, равная нулю при $x < 0$ и при $x > 1$, которая является на интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$ обычным решением однородного уравнения $DE = 0$, удовлетворяет в смысле теории распределений соотношению $DE \in \mathcal{J}_1$ тогда и только тогда, когда величины

$$\sigma_k = E^{(k)}(0) - E^{(k)}(1), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{6}$$

удовлетворяют некоторой системе N линейных уравнений. Выписать эту систему и решить ее (решение очевидно).

Четвертый вопрос: возьмем последовательно

$$D = \frac{d}{dx} - \alpha \quad \text{и} \quad D = \left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)\left(\frac{d}{dx} - \beta\right),$$

где α и β — комплексные числа, $\alpha \neq \beta$. Найти функцию $E(x)$, определенную в третьем вопросе, используя найденные значения σ_k и общий вид решения однородного уравнения $DE = 0$; существует ли эта функция при всех значениях α и β $(\alpha \neq \beta)$?

Упражнение III-15. Используя соотношение

$$e^{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n} S * e^{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n} T = e^{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n} (S * T),$$

найти дифференциальное уравнение в частных производных, элементарным решением которого служит распределение

$$\frac{e^{a_1x_1 + \ldots + a_nx_n}}{(2-n)\, S_n r^{n-2}}.$$

Предполагается, что n — целое положительное число, отличное от 2.

ГЛАВА IV

РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 1. Ряд Фурье для периодической функции и для периодического распределения

1. Разложение периодической функции в ряд Фурье. *Периодом* функции $f(x)$ называется такое вещественное число T, что $f(x+T)=f(x)$. Число 0 всегда является периодом; число, противоположное периоду функции f, и сумма двух периодов функции f снова являются периодами f; таким образом, периоды функции f образуют некоторую подгруппу аддитивной группы R вещественных чисел. Эта подгруппа называется *группой периодов* функции f.

Период функции

Если f непрерывна, то ее группа периодов является *замкнутой* подгруппой R, ибо всякий предел T последовательности периодов T_j функции f также является периодом f. Но ведь существует только три категории замкнутых подгрупп группы R:

1) подгруппа, сводящаяся к 0. Функция f, не имеющая периодов $T \neq 0$, называется *апериодической*;

2) вся группа R. Функция, имеющая периодом любое вещественное число T, равна постоянной;

3) множество кратных lT_0 (l — целое число, положительное, отрицательное или равное нулю) некоторого числа $T_0 > 0$.

Если группа периодов f принадлежит к одной из двух последних категорий, то функция f называется *периодической*; число T_0 в третьем случае называется *основным периодом* функции f.

Замечание. Для функций на R^n (т. е. для функций n переменных) периодом является такой вектор $\vec{T}$, что $f(\vec{x}+\vec{T})=f(\vec{x})$.

Периоды функции f образуют аддитивную подгруппу группы свободных векторов в R^n. Эта подгруппа будет замкнутой, если f непрерывна. Однако категорий в этом случае будет больше трех (6 в R^2, $(n+1)(n+2)/2$ в R^n).

Пусть $\vec{T}_1, \vec{T}_1, \ldots, \vec{T}_n$ — n линейно независимых векторов в R^n; множество их линейных комбинаций $l_1\vec{T}_1 + l_2\vec{T}_2 + \ldots + l_n\vec{T}_n$ с целыми коэффициентами $l_1, l_2, \ldots, l_n$ (произвольного знака) является очень важной подгруппой,

Функция, допускающая в качестве периода любой вектор подобной подгруппы, называется n-периодической.

Экспоненты периода T. Ряд Фурье

Для того чтобы экспонента $e^{\lambda x}$ имела вещественный период $T > 0$, необходимо и достаточно, чтобы $e^{\lambda T} = 1$, т. е. $\lambda T = 2ki\pi$. Если период T задан, то возможными значениями λ будут числа

$$\lambda = ik\frac{2\pi}{T} = ik\omega.$$

Число ω называется *частотой*, сопоставляемой периоду T. Если положить $k = 0$, то получится константа 1, имеющая группой периодов всю R. При $k \neq 0$ возникает экспонента, равная по модулю 1, основным периодом которой является $T/|k|$.

Основная задача, которую мы собираемся поставить, состоит в следующем. Пусть f — периодическая функция, допускающая период T. Разложима ли эта функция в ряд

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega} \tag{IV, 1; 1}$$

(так называемый *ряд Фурье*), каждый член которого с точностью до постоянного множителя является одной из экспонент, имеющих период T.

Члены с противоположными значениями k иногда группируют попарно и заменяют ряд по экспонентам рядом по косинусам и синусам:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{IV, 1; 2}$$

Связь между коэффициентами a_k, b_k и c_k очевидна:

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0, & c_0 &= a_0, \\ \left.\begin{aligned} a_k &= c_k + c_{-k}, \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}), \end{aligned}\right\} & & \left.\begin{aligned} c_k &= \frac{a_k - ib_k}{2}, \\ c_{-k} &= \frac{a_k + ib_k}{2}, \end{aligned}\right\} & k > 0. \end{aligned} \tag{IV, 1; 3}$$

Коэффициенты Фурье локально суммируемой функции

Предположим, что ряд (IV, 1; 1) равномерно сходится (откуда вытекает, что функция f непрерывна). Тогда почленным интегрированием можно вычислить величины

$$C_k = \int_a^{a+T} f(x)\, e^{-ik\omega x}\frac{dx}{T}. \tag{IV, 1; 4}$$

Интервал $(a, a+T)$ есть ***интервал периодичности*** функции f; интеграл, очевидно, не зависит от выбора этого интервала, т. е. не зависит от выбора a. Действительно, при $b \neq a$ можно написать

$$\int_b^{b+T} = \int_a^{a+T} + \left(\int_{a+T}^{b+T} - \int_a^b \right).$$

Разность, стоящая в скобках, равна нулю, ибо функция $g(x) = f(x)\, e^{-ik\omega x}$ допускает T в качестве периода:

$$\int_{a+T}^{b+T} g(x)\, dx = \int_a^b g(\xi + T)\, d\xi = \int_a^b g(\xi)\, d\xi$$

(здесь сделана замена переменного $x = \xi + T$). Наличие $\frac{dx}{T}$ показывает, что величина C_k является *средним* функции $f(x)\, e^{-ik\omega x}$ по интервалу периодичности:

$$C_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \int_a^{a+T} e^{i(l-k)\omega x} \frac{dx}{T}. \tag{IV, 1; 5}$$

Но ведь

$$\int_a^{a+T} e^{im\omega x} \frac{dx}{T} = \begin{cases} \left[\dfrac{e^{im\omega x}}{im\omega} \right]_a^{a+T} \dfrac{1}{T} = 0, & \text{если } m \neq 0, \\ 1, & \text{если } m = 0. \end{cases} \tag{IV, 1; 6}$$

Окончательно находим, что в сумме $\sum$ остается только один член $\neq 0$, а именно член с $l = k$, откуда

$$C_k = c_k. \tag{IV, 1; 7}$$

Таким образом, если функция f непрерывна и *если она обладает равномерно сходящимся рядом Фурье*, то этот ряд полностью известен, причем

$$c_k = c_k(f) = \int_a^{a+T} f(x)\, e^{-ik\omega x} \frac{dx}{T}. \tag{IV, 1; 8}$$

Величины $c_k(f)$ всегда определены (даже если f не непрерывна) при условии, что f *локально суммируема* (суммируема на любом конечном интервале, или, что то же самое, по причине ее периодичности, суммируема на любом интервале периодичности). Во всех случаях мы называем величины $c_k(f)$ *коэффициентами Фурье функции* f; они не меняются, если изменить f на множестве меры нуль, поэтому можно считать, что f определена только почти всюду.

Для разложения в ряд по косинусам и синусам сразу же получаем формулы

$$a_0(f)=\int_a^{a+T} f(x)\frac{dx}{T},$$

$$\left.\begin{aligned} a_k(f)&=2\int_a^{a+T} f(x)\cos k\omega x\,\frac{dx}{T},\\ b_k(f)&=2\int_a^{a+T} f(x)\sin k\omega x\,\frac{dx}{T},\end{aligned}\right\}\quad k>0 \qquad \text{(IV, 1; 9)}$$

(это можно сделать, либо вычисляя a_k и b_k по формулам (IV, 1; 3), либо непосредственно тем же методом, что и для c_k). Множитель 2 возникает из-за того, что среднее функций $\cos^2 k\omega x$ и $\sin^2 k\omega x$ по интервалу периодичности равно $^1/_2$ при $k>0$, в противоположность случаю $k=0$, когда среднее от 1 равно 1.

Различные замечания

1) В образовании коэффициентов Фурье принимают участие значения функции f ***на всем интервале периодичности***, в противоположность коэффициентам ряда Тейлора, в образовании которых принимают участие только значения функции в окрестности точки, в которой производится разложение.

2) Если функция f четна или нечетна, то полезно использовать тригонометрические ряды. В самом деле, если f четна, то могут быть отличны от нуля только коэффициенты a_k (включая сюда a_0), ибо функции $f(x)\sin k\omega x$ нечетны и их интегралы [по интервалу периодичности $(-T/2,\ T/2)$] равны нулю; если же f, напротив, нечетна, то только коэффициенты b_k могут быть отличны от 0, ибо функции $f(x)\cos k\omega x$ нечетны и их интегралы равны нулю.

В каждом из этих случаев функция, от которой для вычисления коэффициента $\neq 0$ берется среднее, является четной, и ее среднее можно вычислять по полупериоду, например по интервалу $(0,\ T/2)$:

$$f \text{ четна: } \left|\begin{aligned} a_0(f)&=\frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\,dx,\\ a_k(f)&=\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos k\omega x\,dx, \qquad k>0;\end{aligned}\right.$$

$$f \text{ нечетна: } \quad b_k(f)=\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin k\omega x\,dx. \qquad \text{(IV, 1; 10)}$$

Аналогично если f удовлетворяет соотношениям другого типа, то некоторые коэффициенты Фурье обращаются в нуль или удовлетворяют простым соотношениям. Например, если f допускает в качестве периода не только T, но и некоторое частное T/p, то сохраняются только те коэффициенты c_k, у которых k кратно p, т. е. только те, для которых соответствующие экспоненты $e^{ik\omega x}$ также имеют период T/p.

3) Пусть f — данная функция на интервале (a, b). *Разложением в ряд Фурье функции f на интервале* (a, b) называют разложение в ряд Фурье периодической функции f_1, имеющей период $b-a$ и совпадающей с f при $a \leqslant x < b$. Заметим, что если функция f непрерывна в точках a и b и $f(a) \neq f(b)$, то f_1 обязательно будет разрывной в точках a и b. Аналогично разложением в ряд Фурье по косинусам (соответственно по синусам) функций f, заданной на интервале $(0, L)$, называют разложение в ряд Фурье функции f_1, которая четна (соответственно нечетна), периодична с периодом $2L$ и совпадает с f на интервале $(0, L)$. Заметим, что в случае ряда по синусам функция f_1 обязательно будет разрывной в точке $x=0$ (или $x=L$), если функция f непрерывна в точке $x=0$ (или $x=L$) и $f(0) \neq 0$ (или $f(L) \neq 0$).

Разумеется, во всех случаях можно выразить коэффициенты Фурье через средние от значений f в данном интервале (a, b) или $(0, L)$. Мы увидим, как используется этот факт в теории колебаний струны и акустических труб.

Заметим, наконец, что всегда имеют место оценки

$$|c_k(f)| \leqslant \int_a^{a+T} |f(x)| \frac{dx}{T} = \frac{1}{T} \|f\|_{L^1} \leqslant \sup_x |f(x)| \qquad \text{(IV, 1; 11)}$$

и аналогичные оценки для коэффициентов ряда по косинусам и синусам:

$$|a_0(f)| \leqslant \int_a^{a+T} |f(x)| \frac{dx}{T} = \frac{1}{T} \|f\|_{L^1} \leqslant \sup_x |f(x)|, \qquad \text{(IV, 1; 12)}$$

$$\left.\begin{matrix} |a_k(f)| \\ |b_k(f)| \end{matrix}\right\} \leqslant 2\int_a^{a+T} |f(x)| \frac{dx}{T} = \frac{2}{T} \|f\|_{L^1} \leqslant 2\sup_x |f(x)| \quad \text{при} \quad k > 0.$$

Можно доказать, что c_k всегда стремятся к 0, когда $k \to \infty$ (теорема, принадлежащая Лебегу).

2. Разложение периодического распределения в ряд Фурье. Мы будем в этой главе обозначать распределения буквами $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ и т. п., чтобы избежать смешения с периодом T. Пусть f — локально суммируемая функция.

Периодические распределения

Ее сдвиг $f(x-T)$ определяется функционалом

$$\langle f(x-T), \varphi(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-T)\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x+T)\,dx = \langle f(x), \varphi(x+T)\rangle. \qquad \text{(IV, 1; 13)}$$

Это наводит на мысль определить сдвиг $\mathcal{T}_{x-T}$ распределения $\mathcal{T}_x$ формулой

$$\langle \mathcal{T}_{x-T}, \varphi(x)\rangle = \langle \mathcal{T}_x, \varphi(x+T)\rangle. \qquad \text{(IV, 1; 14)}$$

Распределение $\mathcal{T}$ будет называться периодическим, допускающим период T, если $\mathcal{T}_{x-T} = \mathcal{T}_x$; иными словами, оно будет называться периодическим, если

$$\langle \mathcal{T}_x, \varphi(x+T) - \varphi(x)\rangle = 0, \qquad \text{(IV, 1; 15)}$$

какова бы ни была функция $\varphi \in \mathcal{D}$.

Пространства $\mathcal{D}(\Gamma)$ *и* $\mathcal{D}'(\Gamma)$

Пусть Γ — *окружность с центром* 0 *длины* T на плоскости xOy. Всякой функции f на Γ можно поставить в соответствие функцию $\tilde{f}$ на R, положив $\tilde{f}(x) = f(M)$, где M — точка на Γ с криволинейной абсциссой $s = x$. Начало отсчета A криволинейных абсцисс — точка окружности Γ, лежащая на Ox; направление отсчета — против часовой стрелки.

Функция $\tilde{f}$ является периодической, допускающей период T.

Обратно, если $\tilde{f}$ — периодическая функция на R, допускающая период T, то она получается предшествующей процедурой из некоторой и притом единственной функции f; функция f определяется равенством $f(M) = \tilde{f}(x)$, где x — одна из криволинейных абсцисс точки M (все эти криволинейные абсциссы равны друг другу с точностью до целочисленного кратного T). Соответствие $f \to \tilde{f}$ между функциями на Γ и функциями на R, имеющими период T, являются изоморфизмом между этими двумя множествами функций. Для функций на Γ имеются понятия непрерывности, дифференцируемости по криволинейной абсциссе $\frac{d}{ds}$, суммируемости по ds и т. п., которые находятся в соответствии с понятиями непрерывности, дифференцируемости по x, локальной суммируемости и т. п. для периодических функций на R.

Следует также заметить, что одна из наиболее распространенных причин, по которой вводятся периодические функции, состоит в том, что функцию на тригонометрическом круге хотят рассматривать как функцию угла θ с периодом 2π.

Обозначим через $\mathscr{D}(\Gamma)$ пространство комплекснозначных функций на Γ, бесконечно дифференцируемых по криволинейной абсциссе s. (В силу соответствия, которое мы определили в начале этого параграфа, эти функции $\varphi \in \mathscr{D}(\Gamma)$ сопоставляются бесконечно дифференцируемым функциям $\tilde{\varphi}$ на R, образующим некоторое подпространство пространства $\mathscr{E}$, но не имеющим отношения к функциям из $\mathscr{D}(R)$.) Функции $\varphi_j \to 0$ в $\mathscr{D}(\Gamma)$, если они вместе с каждой из их производных равномерно стремятся к 0 на Γ.

Таким образом, пространство $\mathscr{D}(\Gamma)$ оказывается более простым, чем пространство $\mathscr{D}(R)$ (это объясняется тем, что Γ — ограниченное множество). Функция, тождественно равная 1 на Γ, принадлежит $\mathscr{D}(\Gamma)$, тогда как функция, тождественно равная 1 на R, не принадлежит $\mathscr{D}(R)$.

Пространство $\mathscr{D}'(\Gamma)$ — это пространство линейных непрерывных форм на $\mathscr{D}(\Gamma)$.

Взаимно однозначное соответствие между распределениями с периодом T и распределениями из $\mathscr{D}'(\Gamma)$

Пусть f — локально суммируемая функция на Γ, $\tilde{f}$ — соответствующая периодическая функция на R. Для функции $\varphi \in \mathscr{D}(R)$ построим функцию $\tilde{\Phi}$ — сумму сдвигов функции φ:

$$\tilde{\Phi}(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \varphi(x + lT). \qquad \text{(IV, 1; 16)}$$

Функция $\tilde{\Phi}$ является периодической с периодом T и бесконечно дифференцируемой. Поэтому она соответствует некоторой функции $\Phi \in \mathscr{D}(\Gamma)$. В действительности, разумеется, при каждом значении x сумма $\sum$ является конечной суммой. Легко видеть, что

$$\int_{\Gamma} f(s)\Phi(s)\,ds = \int_{R} \tilde{f}(x)\varphi(x)\,dx. \qquad \text{(IV, 1; 17)}$$

В самом деле, правая часть этого равенства равна

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{lT}^{(l+1)T} \tilde{f}(x)\varphi(x)\,dx = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{0}^{T} \tilde{f}(x)\varphi(x+lT)\,dx =$$

$$= \int_{0}^{T} f(x)\tilde{\Phi}(x)\,dx, \qquad \text{(IV, 1; 18)}$$

а этот интеграл равен левой части равенства (IV, 1; 17).

Таким образом, возникает мысль *определить* периодическое распределение $\tilde{\mathcal{T}}$ периода T на R, сопоставляемое распределению $\mathcal{T}$ на Г, формулой

$$\langle\tilde{\mathcal{T}}, \varphi\rangle = \langle\mathcal{T}, \Phi\rangle. \qquad \text{(IV, 1; 19)}$$

Эта формула действительно определяет некоторое периодическое распределение $\tilde{\mathcal{T}}$, ибо если заменить $\varphi(x)$ на $\varphi(x+T)$, то функция $\tilde{\Phi}$, а значит и Φ, не изменится.

Например, пусть $\mathcal{T}$ — распределение δ на Г, образованное массой $+1$ в точке с криволинейной абсциссой 0; тогда $\tilde{\mathcal{T}}$ будет образовано массами $+1$, помещенными во все точки с абсциссами lT на прямой:

$$\langle\tilde{\delta}, \varphi\rangle = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \varphi(lT) \quad \text{или} \quad \tilde{\delta}(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(x-lT). \qquad \text{(IV, 1; 20)}$$

Обратно, можно показать, что всякое периодическое распределение периода T на R является распределением $\tilde{\mathcal{T}}$, сопоставленным некоторому, и притом единственному, распределению $\mathcal{T}$ на Г.

Поэтому мы будем отныне рассуждать всегда о распределениях $\mathcal{T}$ на Г.

Свертка в $\mathcal{D}'$ (Г)

На окружности Г существует, с точностью до кратных T, сложение дуг. Поэтому можно определить свертку двух распределений $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$ формулой

$$\langle\mathcal{S} * \mathcal{T}, \varphi\rangle = \langle\mathcal{S}_\xi \otimes \mathcal{T}_\eta, \varphi(\xi+\eta)\rangle. \qquad \text{(IV, 1; 21)}$$

Эта свертка существует *всегда*, ибо всякое распределение на Г имеет *ограниченный носитель*. Она обладает теми же самыми свойствами, что и свертка на R, но является более простой. В частности, $\delta * \mathcal{T} = \mathcal{T}$, $\delta' * \mathcal{T} = \mathcal{T}'$ и т. п. В случае двух функций f и g свертка дается формулой

$$h(s) = \int_\Gamma f(s-t)\, g(t)\, dt. \qquad \text{(IV, 1; 22)}$$

Для соответствующих периодических функций $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ на R эта свертка записывается в виде

$$h(x) = \int_a^{a+T} \tilde{f}(x-\xi)\, \tilde{g}(\xi)\, d\xi, \qquad \text{(IV, 1; 23)}$$

где $(a, a+T)$ — произвольный интервал периодичности. Эта свертка не имеет никакого отношения к свертке функций $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ на R. Последняя содержала бы

интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}$ и к тому же не имела бы смысла в случае двух периодических (и имеющих тем самым неограниченные носители) функций.

Ряд Фурье для распределения

Коэффициенты Фурье локально суммируемой функции f на Γ суть не что иное, как

$$c_k(f)=\int\limits_{\Gamma} f(s)\,e^{-ik\omega s}\,\frac{ds}{T}=\frac{1}{T}\langle f,\ e^{-ik\omega s}\rangle. \qquad \text{(IV, 1; 24)}$$

Поэтому мы *определим* коэффициенты Фурье распределения $\mathcal{T}\in\mathcal{D}'(\Gamma)$ формулой

$$c_k(\mathcal{T})=\frac{1}{T}\langle \mathcal{T},\ e^{-ik\omega s}\rangle. \qquad \text{(IV, 1; 25)}$$

Рядом Фурье распределения $\mathcal{T}$ мы будем называть ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\mathcal{T})\,e^{ik\omega s}, \qquad \text{(IV, 1; 26)}$$

где $c_k(\mathcal{T})$ даются равенством (IV, 1; 25).

Пример. Для $\mathcal{T}=\delta$ имеем $c_k(\delta)=\frac{1}{T}\langle\delta,\ e^{-ik\omega s}\rangle=\frac{1}{T}$, и, следовательно, ряд Фурье для δ имеет вид

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}\,e^{ik\omega s}.$$

Пусть некоторый тригонометрический ряд $\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} C_l e^{il\omega s}$ сходится к распределению $\mathcal{T}$ в $\mathcal{D}'(\Gamma)$ (т. е. для любой $\varphi\in\mathcal{D}(\Gamma)$ числовой ряд $\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} C_l\langle e^{il\omega s},\ \varphi\rangle$ сходится к числу $\langle\mathcal{T},\ \varphi\rangle$). Полагая $\varphi=e^{-ik\omega s}$ и учитывая равенство (IV, 1; 6), будем иметь

$$TC_k=\langle\mathcal{T},\ e^{-ik\omega s}\rangle=Tc_k(\mathcal{T}). \qquad \text{(IV, 1; 27)}$$

Итак, *никакой тригонометрический ряд, кроме ряда Фурье для $\mathcal{T}$, не может сходиться к $\mathcal{T}$ в $\mathcal{D}'(\Gamma)$.*

Мы увидим в дальнейшем, что присутствие множителей T или $1/T$ усложняет все формулы. Формулы будут, конечно, наиболее простыми в случае, когда $T=1$, $\omega=2\pi$.

§ 2. Сходимость рядов Фурье в смысле теории распределений и в смысле теории функций

1. Сходимость ряда Фурье распределения.

Предложение 1. *Ряд Фурье распределения* δ *сходится к* δ *(в пространстве распределений* $\mathscr{D}'(\Gamma)$*):*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{ik\omega s} = \delta. \qquad \text{(IV, 2; 1)}$$

Мы уже заранее знаем, что этот тригонометрический ряд сходится в $\mathscr{D}'(\Gamma)$, поскольку его коэффициенты, равные $\frac{1}{T}$, ограничены и, значит, мажорируются некоторой степенью $|k|$ (см. гл. II, предложение 14).

Нам остается показать, что его сумма $\mathcal{T}$ равна δ. Умножим его почленно на $e^{i\omega s}$:

$$e^{i\omega s}\mathcal{T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{i(k+1)\omega s} = \mathcal{T} \qquad \text{(IV, 2; 2)}$$

или

$$(e^{i\omega s} - 1)\mathcal{T} = 0. \qquad \text{(IV, 2; 3)}$$

Таким образом, $\mathcal{T}$ удовлетворяет мультипликативному уравнению

$$\alpha\mathcal{T} = 0, \qquad \text{(IV, 2; 4)}$$

где $\alpha = e^{i\omega s} - 1$ — данная, бесконечно дифференцируемая функция, отличная всюду от 0, кроме единственной точки $s = 0$ окружности Γ, в которой она имеет простой нуль $[\alpha'(0) = i\omega \neq 0]$. Мы знаем, что в этом случае $\mathcal{T}$ пропорционально δ (гл. II, предложение 8): $\mathcal{T} = C\delta$. Но, по определению сходимости распределений, равенство $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{ik\omega s} = C\delta$ означает, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \langle e^{ik\omega s}, \varphi(s)\rangle = C\varphi(0) \qquad \text{(IV, 2; 5)}$$

для любой функции $\varphi \in D(\Gamma)$. Полагая $\varphi = 1$, имеем

$$\langle e^{ik\omega s}, 1\rangle = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq 0, \\ T & \text{при } k = 0, \end{cases} \qquad \text{(IV, 2; 6)}$$

откуда $C = 1$. Ч. и т. д.

Можно также сказать, что из равенства $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{ik\omega s} = C\delta$ обязательно вытекает [см. (IV, 1; 27)] равенство

$$\frac{1}{T} = c_k(C\delta) = Cc_k(\delta) = \frac{C}{T}, \quad \text{откуда} \quad C = 1.$$

Замечание. Если вместо Г взять вещественную прямую R, то легко увидеть, что ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{ik\omega x}$ сходится в $\mathcal{D}'(R)$ к периодическому распределению $\sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(x - lT)$, несущему массу $+1$ в каждой точке с абсциссой, равной целочисленному кратному T:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{ik\omega x} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(x - lT). \tag{IV, 2; 7}$$

Сходимость ряда Фурье распределения

Предложение 2. *Ряд Фурье распределения $\mathcal{T}$ на* Г (*или периодического распределения $\tilde{\mathcal{T}}$ на R*) *сходится к этому распределению в* $\mathcal{D}'(\Gamma)$ [*или в* $\mathcal{D}'(R)$]:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\mathcal{T}) e^{ik\omega s} = \mathcal{T}. \tag{IV, 2; 8}$$

В самом деле, в силу непрерывности свертки (без осложнений с носителями, поскольку на Г все носители ограничены) мы можем почленно свернуть ряд (IV, 2; 1) с распределением $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'(\Gamma)$:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T} * \delta = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} (e^{ik\omega s} * \mathcal{T}). \tag{IV, 2; 9}$$

Полученный ряд должен быть сходящимся в $\mathcal{D}'(\Gamma)$. Но, согласно формуле, дающей свертку распределения с бесконечно дифференцируемой функцией [см. формулу (III, 2; 24)], мы имеем

$$\mathcal{T} * e^{ik\omega s} = \langle \mathcal{T}_t, e^{ik\omega(s-t)} \rangle = e^{ik\omega s} \langle \mathcal{T}_t, e^{-ik\omega t} \rangle = Tc_k(\mathcal{T}) e^{ik\omega s}, \tag{IV, 2; 10}$$

так что ряд (IV, 2; 9) совпадает с рядом (IV, 2; 8)[1].

[1]) Мы доказали (гл. II, предложение 14), что если $|c_k|$ мажорируется при $k \to \infty$ некоторой степенью $|k|$, то тригонометрический ряд $\sum c_k e^{ik\omega s}$ будет сходящимся в $\mathcal{D}'(\Gamma)$. *Мы приняли без доказательства обратное утверждение.* Таким образом, *для любого $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ величины $|c_k(\mathcal{T})|$ допускают подобную мажоранту.*

2. Сходимость ряда Фурье функции. Если предположить только, что функция f локально суммируема, то нет оснований надеяться, что ряд Фурье $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ik\omega x}$ будет сходиться к $f(x)$ *во всякой точке* x, ибо изменение функции f на множестве меры нуль не изменяет ее коэффициентов Фурье; можно, самое большее, ожидать *сходимости почти всюду* (т. е. для почти всех значений x) или сходимости *в среднем*, т. е. сходимости в пространстве L^1 классов суммируемых функций на интервале периодичности $(a, a+T)$. К сожалению, это не так.

Предположим поэтому, что функция f *непрерывна*. Казалось бы, мы вправе ожидать сходимости во всякой точке x, и даже равномерной сходимости; здесь это снова не так.

Тем не менее справедлива следующая теорема.

Предложение 3. *Пусть f — функция с ограниченным изменением в интервале периодичности. Тогда ряд Фурье функции f*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ik\omega x} \qquad \text{(IV, 2; 11)}$$

условно сходится в любой точке $x \in R$ к среднему арифметическому из предела слева $f(x-0)$ и предела справа $f(x+0)$:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} c_k(f)e^{ik\omega x} = \frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0)). \qquad \text{(IV, 2; 12)}$$

Если, в частности, функция (с ограниченным изменением) f непрерывна в некоторой точке x, то ее ряд Фурье в этой точке сходится к $f(x)$; если во всякой точке x замкнутого интервала (α, β) функция f непрерывна (и, значит, также непрерывна слева в точке α и непрерывна справа в точке β), то условная сходимость будет равномерной на (α, β).

Эта теорема требует некоторых замечаний и определений.

1) Полным изменением $V(f; (a, b))$ на (a, b) функции f, определенной на замкнутом интервале (a, b), называется верхняя грань сумм $\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$, взятая по всевозможным разбиениям интервала (a, b) на конечное число частичных интервалов:

$$(a = x_0, x_1), \quad (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, \quad b = x_n).$$

Если величина $V(f; (a, b))$ конечна, то говорят, что функция f имеет ограниченное изменение на (a, b). Всякая *монотонная* ограниченная функция имеет ограниченное изменение, причем $V(f; (a, b)) = |f(b) - f(a)|$. Отсюда вытекает, что разность двух возрастающих ограниченных функций имеет ограниченное изменение; можно доказать, что, и обратно, всякая функция с ограниченным изменением представляет собой разность двух возрастающих ограниченных функций. В частности, если некоторая ограниченная функция имеет только конечное число относительных максимумов и минимумов, между любыми двумя из которых она монотонна, так же как между a и первым из них и последним из них и b, то она является функцией с ограниченным изменением. Это показывает, что ограниченные функции, встречающиеся на практике, имеют ограниченное изменение. Можно, однако, доказать существование непрерывных функций с неограниченным изменением, и даже таких функций, которые имеют бесконечное число относительных максимумов и минимумов *на любом интервале* (α, β).

Непрерывная функция с ограниченной производной (в обычном смысле) является на ограниченном интервале (a, b) функцией с ограниченным изменением, причем

$$V(f; (a, b)) = \int_a^b |f'(x)|\, dx.$$

То же самое справедливо, если f имеет только конечное число точек разрыва первого рода, а в остальных точках имеет производную, ограниченную по модулю фиксированным числом; интервал (a, b) снова предполагается ограниченным [1]).

2) Функция f с ограниченным изменением не обязана быть непрерывной, однако в любой точке x она имеет *предел слева и предел справа*:

$$\left.\begin{aligned} f(x-0) &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon<0}} f(x+\varepsilon), \\ f(x+0) &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} f(x+\varepsilon). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV, 2; 13)}$$

[1]) Формулу для полного изменения в этом случае следует модифицировать. К интегралу $\int_a^b |f'(x)|\, dx$ надо добавить сумму модулей скачков функции f во всех точках разрыва $\sum_i |f(x_i+0) - f(x_i-0)|$. — *Прим. перев.*

Эти пределы, вдобавок, *совпадают* (и функция f является непрерывной) всюду, кроме, самое большее, *счетного числа* точек x.

3) Когда мы говорим, что ряд Фурье является *условно сходящимся*, мы хотим сказать, что он, как это указывает формула (IV, 2; 12), является условно сходящимся *при группировке* членов с противоположными значениями k. Сумма $\sum_{k=-N}^{N} c_k(f)\,e^{ik\omega x}$ имеет предел, однако каждая из сумм $\sum_{k=0}^{N}$ и $\sum_{k=-N}^{0}$ не обязательно имеет предел. Напротив, в случае ряда по косинусам и синусам ряд по косинусам и ряд по синусам по отдельности сходятся, поскольку они являются рядами Фурье для функций

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2}, \quad \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

каждая из которых имеет ограниченное изменение.

4) Случай, когда пределы $f(x-0)$ и $f(x+0)$ различны, сразу же сведется к случаю, когда они совпадают (и функция f непрерывна в точке x), как только нужная сходимость будет проверена для какой-либо частной функции с ограниченным изменением, разрывной в точке x. Но ведь всегда можно предполагать, что $x=0$; выбирая в качестве f *нечетную* функцию, разрывную в начале координат, будем иметь $f(0+0)=-f(0-0)\neq 0$; полусумма этих пределов равна нулю, а поскольку f нечетна, ее ряд Фурье содержит только синусы, которые все обращаются в нуль при $x=0$, и, значит, он сходится при $x=0$ к нулю, т. е. к полусумме пределов.

Доказательство предложения 3 является достаточно тонким; оно использует теорию интеграла Дирихле:

$$\int_a^b f(x)\frac{\sin \lambda x}{x}\,dx.$$

Его можно найти в книгах по дифференциальному и интегральному исчислению[1]).

Мы же ограничимся простейшим случаем:

Предложение 4. *Если функция f дважды непрерывно дифференцируема, то ее ряд Фурье сходится к ней абсолютно и равномерно.*

---

[1]) См., например, Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, т. I, § 9.42, Физматгиз, М., 1962. — *Прим. перев.*

Предположим, что f имеет одну непрерывную производную f'. Одна интеграция по частям при $k \neq 0$ дает

$$c_k(f) = \left[\frac{e^{-ik\omega x}}{-ik\omega} \cdot \frac{f(x)}{T} \right]_a^{a+T} - \int_a^{a+T} \frac{e^{-ik\omega x}}{-ik\omega} f'(x) \frac{dx}{T}. \qquad \text{(IV, 2; 14)}$$

Обинтегрированный член равен нулю в силу периодичности. Возникает очень важная формула

$$c_k(f) = \frac{1}{ik\omega} c_k(f'). \qquad \text{(IV, 2; 15)}$$

В общем случае, если функция f m раз непрерывно дифференцируема, имеем при $k \neq 0$

$$c_k(f) = \left(\frac{1}{ik\omega}\right)^m c_k\left(f^{(m)}\right), \qquad \text{(IV, 2; 16)}$$

откуда

$$|c_k(f)| < \left|\frac{1}{k\omega}\right|^m \int_a^{a+T} |f^{(m)}(x)| \frac{dx}{T} = \frac{M_m}{|k|^m}. \qquad \text{(IV, 2; 17)}$$

Итак, чем более регулярна функция f, тем быстрее стремятся к нулю ее коэффициенты Фурье при $|k| \to \infty$.

В частности, при $m = 2$ модуль $|c_k(f)|$ мажорируется величиной $M_2/|k|^2$, и поскольку $|e^{ik\omega x}| = 1$, ряд из модулей $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)\, e^{ik\omega x}|$ мажорируется при всех x знакоположительным сходящимся числовым рядом $|c_0| + \sum\limits_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{M_2}{k^2}$.

Этим, разумеется, доказано, что ряд Фурье функции f сходится абсолютно и равномерно. Его сумма g является непрерывной функцией; остается показать, что $g = f$. Известно, что ряд Фурье сходится к f в смысле теории распределений (предложение 2); сходясь равномерно к g, он a fortiori сходится к g в смысле теории распределений. Таким образом, функции f и g, как распределения, равны, а значит, они равны почти всюду как функции; будучи непрерывными, они равны всюду. Ч. и т. д.

Замечание. Формула (IV, 2; 16) обобщается на распределения. Из равенства (IV, 1; 25) по самому определению производной распределения вы-

текает формула

$$c_k(\mathcal{T}^{(m)}) = \frac{1}{T}\langle \mathcal{T}^{(m)},\ e^{-ik\omega s}\rangle = \frac{(-1)^m}{T}\langle \mathcal{T},\ (e^{-ik\omega s})^{(m)}\rangle =$$

$$= (ik\omega)^m \frac{1}{T}\langle \mathcal{T},\ e^{-ik\omega s}\rangle = (ik\omega)^m c_k(\mathcal{T}), \quad \text{(IV, 2; 18)}$$

которая обобщает формулу (IV, 2; 16).

Можно также рассуждать и иным способом: из соотношения

$$\mathcal{T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\mathcal{T})\, e^{ik\omega s} \quad \text{(IV, 2; 8)}$$

почленным дифференцированием, всегда законным для распределений, выводится соотношение

$$\mathcal{T}^{(m)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\mathcal{T})\,(ik\omega)^m\, e^{ik\omega s}. \quad \text{(IV, 2; 19)}$$

Мы имеем здесь сходящийся тригонометрический ряд, поэтому правая часть формулы является рядом Фурье для левой:

$$c_k(\mathcal{T}^{(m)}) = (ik\omega)^m c_k(\mathcal{T}). \quad \text{(IV, 2; 20)}$$

Это и есть формула (IV, 2; 18) — обобщение формулы (IV, 2; 16) на периодические распределения.

§ 3. Гильбертовы базисы в гильбертовом пространстве. Сходимость ряда Фурье в среднем квадратичном

1. Определение гильбертова пространства. Гильбертовым пространством называется векторное пространство $\mathcal{H}$ над полем комплексных чисел C, снабженное формой $(\vec{x}, \vec{y})$, со значениями в C. Эта форма называется скалярным произведением и обладает следующими свойствами:

1) *Форма* $(\vec{x}, \vec{y})$ — *эрмитова*:

$$\left.\begin{aligned} (\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) &= (\vec{x}_1, \vec{y}) + (\vec{x}_2, \vec{y}), \\ (\vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2) &= (\vec{x}, \vec{y}_1) + (\vec{x}, \vec{y}_2), \end{aligned}\right\} \quad \text{(IV, 3; 1)}$$

$$(\lambda\vec{x}, \mu\vec{y}) = \lambda\bar{\mu}(\vec{x}, \vec{y}). \quad \text{(IV, 3; 2)}$$

Говорят также, что это скалярное произведение линейно по $\vec{x}$ и полулинейно по $\vec{y}$. Кроме того,

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{(\vec{y}, \vec{x})} \text{ (эрмитовость).} \tag{IV, 3; 3}$$

Условие эрмитовости эквивалентно условию

$$\text{форма } (\vec{x}, \vec{x}) \text{ вещественна при всех } \vec{x}. \tag{IV, 3; 4}$$

2) *Форма* $(\vec{x}, \vec{y})$ — *положительно определенная*, иначе говоря,

$$\left.\begin{array}{l}(\vec{x}, \vec{x}) \geqslant 0 \text{ при всех } \vec{x}, \\ (\vec{x}, \vec{x}) = 0 \text{ равносильно } \vec{x} = \vec{0}.\end{array}\right\} \tag{IV, 3; 5}$$

Отсюда, записав, что

$$(\vec{x} + \lambda\vec{y}, \vec{x} + \lambda\vec{y}) \geqslant 0,$$

можно вывести *неравенство Шварца*[1]):

$$|(\vec{x}, \vec{y})| \leqslant \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})}, \tag{IV, 3; 6}$$

а из него — *неравенство Минковского*:

$$\sqrt{(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y})} \leqslant \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} + \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})}. \tag{IV, 3; 7}$$

Отсюда вытекает, что функционал $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$ является *нормой* на $\mathscr{H}$; $\mathscr{H}$ является, таким образом, *нормированным пространством*[2]).

3) В метрике, определяемой этой нормой, *пространство* $\mathscr{H}$ *является полным*, т. е. оно является *банаховым пространством*[3]).

2. Гильбертов базис. Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство, и пусть $(\vec{e}_i)_{i \in I}$ — семейство векторов $\vec{e}_i$ из $\mathscr{H}$. Говорят, что семейство $(\vec{e}_i)_{i \in I}$ является *гильбертовым базисом* в $\mathscr{H}$, если выполняются два условия.

---

[1]) В русской литературе его называют также неравенством Коши — Буняковского. — *Прим. перев.*

[2]) Подробней об этом см. в книге Г. Е. Шилова, Математический анализ, специальный курс, изд. второе, Физматгиз, М., 1961. — *Прим. перев.*

[3]) Банахово пространство — это *полное* векторное нормированное пространство.

1) Векторы $\vec{e}_i$ попарно ортогональны и имеют норму 1:

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \qquad \text{(IV, 3; 8)}$$

Из этого условия вытекает, что векторы $\vec{e}_i$ линейно независимы.

2) Система векторов $(\vec{e}_i)_{i \in I}$ является *тотальной* в $\mathscr{H}$, или *топологически производящей* $\mathscr{H}$. (В литературе часто попадается термин *полная*, однако этот термин является неправильным и ведет к путанице.) Это означает, что множество конечных линейных комбинаций векторов $\vec{e}_i$ плотно в $\mathscr{H}$. Можно доказать, что для этого *необходимо и достаточно, чтобы никакой вектор $\vec{x} \neq \vec{0}$ не был ортогонален по всем векторам $\vec{e}_i$.*

Пусть теперь система $(\vec{e}_i)_{i \in I}$ является некоторым гильбертовым базисом в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Для любого вектора $\vec{x} \in \mathscr{H}$ можно образовать комплексные числа

$$x_i = (\vec{x}, \vec{e}_i), \qquad \text{(IV, 3; 9)}$$

называемые координатами вектора $\vec{x}$ в данном гильбертовом базисе.

Можно доказать следующее:

Теорема о гильбертовых базисах, или предложение 5.

1) *Пусть* $\vec{x} \in \mathscr{H}$, $x_i = (\vec{x}, \vec{e}_i)$.

Ряд $\sum_{i \in I} x_i \vec{e}_i$ *суммируем в* $\mathscr{H}$, *и его сумма равна* $\vec{x}$.

Ряд $\sum_{i \in I} |x_i|^2$ *суммируем, и его сумма равна* $\|\vec{x}\|^2$.

Кроме того, если $\vec{y} \in \mathscr{H}$, $y_i = (\vec{y}, \vec{e}_i)$, *то ряд* $\sum_{i \in I} x_i \bar{y}_i$ *суммируем и его сумма равна* $(\vec{x}, \vec{y})$.

2) *Обратно, пусть* $(x_i)_{i \in I}$ *— семейство комплексных чисел, такое, что числовой ряд* $\sum_{i \in I} |x_i|^2$ *суммируем. Тогда ряд* $\sum_{i \in I} x_i \vec{e}_i$ *суммируем в* $\mathscr{H}$, *а его сумма* $\vec{x}$ *является единственным вектором из* $\mathscr{H}$, *таким, что* $(\vec{x}, \vec{e}_i) = x_i$ *при всех* i.

Сходимость ряда $\sum_{i\in I} x_i\vec{e}_i$ к вектору $\vec{x}$ означает, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое конечное множество $J\subset I$, что для любого конечного множества $K\supset J$ выполняется неравенство

$$\left\|\left(\sum_{i\in K} x_i\vec{e}_i\right)-\vec{x}\right\|\leqslant\varepsilon. \qquad \text{(IV, 3; 10)}$$

3. Пространство $L^2(T)$. Обозначим $L^2(a, b)$ пространство *классов* функций f с суммируемым квадратом на интервале (a, b) (слово *классы* означает, что две почти всюду равные функции отождествляются). Иными словами, рассмотрим измеримые функции f, у которых интеграл

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx$$

конечен.

$L^2(a, b)$ является векторным пространством, ибо если $f\in L^2$ и $g\in L^2$, то

$$|f+g|^2\leqslant 2(|f|^2+|g|^2) \text{ и, значит, } f+g\in L^2. \qquad \text{(IV, 3; 11)}$$

С другой стороны, напомним, что $2|fg|\leqslant|f|^2+|g|^2$ и, следовательно, при $f\in L^2$ и $g\in L^2$ произведение fg *суммируемо* на (a, b). В частности, если интервал (a, b) *конечен*, то, полагая $g=1$, видим, что всякая функция с суммируемым квадратом на конечном интервале a fortiori будет суммируемой. [Обратное неверно, как показывает пример функции $f(x)=1/\sqrt{x}$ на интервале $(0, 1)$. На бесконечном интервале такое включение не имеет места ни в ту, ни в другую сторону:

функция $f(x)=1/x$ имеет суммируемый квадрат, но не суммируема на $(1, +\infty)$;

функция $f(x)=1/[\sqrt{x}(x+1)]$ суммируема, но ее квадрат не суммируем на $(0, +\infty)$].

На пространстве $L^2(a, b)$ мы рассмотрим скалярное произведение

$$(f, g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx. \qquad \text{(IV. 3; 12)}$$

Это, очевидно, положительно определенная эрмитова форма $\left(\text{из равенства } \int_a^b |f(x)|^2\,dx=0 \text{ вытекает, что } f \text{ равна нулю почти всюду}\right)$.

Можно доказать (*теорема Фишера — Рисса*), что $L^2(a, b)$ полно в метрике, определяемой нормой

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}, \tag{IV, 3; 13}$$

значит $L^2(a, b)$ является *гильбертовым пространством*.

Если $b = a + T$, то пространство $L^2(a, a+T)$ будет, очевидно, изоморфно пространству классов периодических функций (с периодом T) с локально суммируемым квадратом, которое снабжено скалярным произведением, задаваемым интегралом (IV, 3; 12) по произвольному интервалу периодичности. Впрочем, мы возьмем здесь более удобное скалярное произведение

$$(f, g) = \int_a^{a+T} f(x)\overline{g(x)} \frac{dx}{T} \tag{IV, 3; 14}$$

и назовем *определенное таким способом гильберпово пространство пространством* $L^2(T)$.

Сходимость в этом пространстве — это то, что называют также *сходимостью в среднем квадратичном*:

функции $f_j \in L^2(T)$ сходятся к функции $f \in L^2(T)$ при $j \to \infty$, если

$$\lim_{j \to \infty} \int_a^{a+T} |f_j(x) - f(x)|^2 \frac{dx}{T} = 0. \tag{IV, 3; 15}$$

Рассмотрим теперь систему векторов

$$\vec{e}_k = e^{ik\omega x}, \quad k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \tag{IV, 3; 16}$$

В силу равенства (IV, 1; 6)

$$\int_a^{a+T} e^{i(k-l)\omega x} \frac{dx}{T} = \delta_{kl}, \tag{IV, 3; 17}$$

т. е. эти векторы попарно ортогональны и имеют норму 1.

Временно допустим, что эта система *тотальна* в $L^2(T)$. Тогда она является гильбертовым базисом, и, значит, любая функция $f \in L^2(T)$ имеет координаты. Эти координаты есть не что иное, как ее коэффициенты Фурье:

$$f_k = \int_a^{a+T} f(x) e^{-ik\omega x} \frac{dx}{T} = c_k(f). \tag{IV, 3; 18}$$

Общая теорема о гильбертовых базисах дает теперь предложение.

Предложение 6.

1) *Если $f \in L^2(T)$, то ряд из квадратов ее коэффициентов Фурье суммируем, причем*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 = \int_a^{a+T} |f(x)|^2 \frac{dx}{T} \qquad \text{(IV, 3; 19)}$$

(равенство Бесселя — Парсеваля). Кроме того, при $g \in L^2(T)$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\overline{c_k(g)} = \int_a^{a+T} f(x)\overline{g(x)} \frac{dx}{T}. \qquad \text{(IV, 3; 20)}$$

Ряд Фурье функции f сходится к ней в среднем квадратичном, т. е.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\, e^{ik\omega x} = f(x) \qquad \text{(IV, 3; 21)}$$

в следующем смысле:

$$\lim_{\substack{M\to\infty \\ N\to\infty}} \int_a^{a+T} \left| \left(\sum_{k=-M}^{N} c_k(f)\, e^{ik\omega x} \right) - f(x) \right|^2 \frac{dx}{T} = 0. \qquad \text{(IV, 3; 22)}$$

2) *Обратно, если $(c_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ — некоторая система комплексных чисел, такая, что ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$ сходится, то ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x}$ сходится в среднем квадратичном к некоторой функции $f \in L^2(T)$, причем f является единственной функцией из $L^2(T)$, имеющей числа c_k коэффициентами Фурье.*

Для того чтобы предложение 6 было доказано, нам остается доказать, что векторы $\vec{e}_k$ образуют топологически производящую систему. Для этого достаточно показать (см. стр. 183), что любая функция $f \in L^2(T)$, у которой все коэффициенты Фурье равны нулю, равна нулю почти всюду. Но ведь это очевидно; f, в силу предложения 2, является суммой в $\mathscr{D}'$ своего ряда Фурье, и, значит, f как распределение равна нулю, а тогда f как функция равна нулю почти всюду.

Различные замечания 1) В случае ряда по косинусам и синусам равенство Бесселя — Парсеваля принимает вид

$$|a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}(|a_k|^2 + |b_k|^2) = \int_a^{a+T} |f(x)|^2 \frac{dx}{T}. \qquad \text{(IV, 3; 23)}$$

Это объясняется тем, что косинусы $\cos k\omega x$ и синусы $\sin k\omega x$ попарно ортогональны, но их нормы при $k > 0$ не равны 1:

$$\|\cos k\omega x\|^2 = \|\sin k\omega x\|^2 = \frac{1}{2}.$$

Равенство Бесселя — Парсеваля выражает тот факт, что вследствие ортогональности среднее от $|f(x)|^2$ равно сумме средних от квадратов модулей членов ряда Фурье.

2) Аналогичной теоремы в $L^1(T)$, т. е. в пространстве классов периодических локально суммируемых функций, не существует.

Все же в этом случае очевидно, что модули $|c_k(f)|$ ограничены числом $\frac{1}{T}\|f\|_{L^1} = \int_a^{a+T} |f(x)| \frac{dx}{T}$ и можно даже доказать (*теорема Лебега*), что $c_k(f)$ стремятся к 0 при $|k| \to \infty$. Однако никакой теоремы о сходимости для таких рядов Фурье не существует.

3) Если ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|$ сходится, то c_k стремятся к 0 при $|k| \to \infty$, а тогда и подавно сходится ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$; обратное утверждение неверно, как показывает пример $c_k = \frac{1}{k}$ (при $k \neq 0$). Если ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|$ сходится, то ряд Фурье сходится абсолютно и равномерно и его сумма является непрерывной функцией.

4) Из того, что ряд Фурье функции f сходится к f в $L^2(T)$, никоим образом не следует, что он сходится к f почти всюду.

5) Пусть J — конечное множество целых чисел произвольного знака. Тригонометрический полином

$$P(x) = \sum_{k \in J} c_k(f) e^{ik\omega x}$$

является тем из тригонометрических полиномов

$$P(x) = \sum_{k \in J} C_k e^{ik\omega x},$$

который дает наилучшую аппроксимацию функции f в среднем квадратичном, т. е. тем, для которого интеграл

$$\int_a^{a+T} |P(x)-f(x)|^2 \frac{dx}{T}$$

минимален.

В самом деле, формула Бесселя — Парсеваля дает

$$\int_a^{a+T} |P(x)-f(x)|^2 \frac{dx}{T} = \sum_{k \in J} |C_k - c_k(f)|^2 + \sum_{k \notin J} |c_k(f)|^2. \quad \text{(IV, 3; 24)}$$

Ч. и т. д.

Значение этого минимума, таким образом, равно

$$\sum_{k \notin J} |c_k(f)|^2. \quad \text{(IV, 3; 25)}$$

Эта величина может быть сделана сколь угодно малой, если J достаточно велико.

§ 4. Сверточная алгебра $\mathscr{D}'(\Gamma)$

Пусть $\mathscr{S}$ и $\mathscr{T}$ — два распределения на Г. Имеем

$$c_k(\mathscr{S} * \mathscr{T}) = \frac{1}{T}\langle \mathscr{S} * \mathscr{T},\ e^{-ik\omega s}\rangle = \frac{1}{T}\langle \mathscr{S}_\xi \otimes \mathscr{T}_\tau,\ e^{-ik\omega(\xi+\eta)}\rangle =$$

$$= \frac{1}{T}\langle \mathscr{S}_\xi,\ e^{-ik\omega\xi}\rangle \cdot \langle \mathscr{T}_\eta,\ e^{-ik\omega\eta}\rangle = Tc_k(\mathscr{S})\,c_k(\mathscr{T}). \quad \text{(IV, 4; 1)}$$

Итак,

Предложение 7. *Коэффициенты Фурье свертки $\mathscr{S} * \mathscr{T}$ суть, с точностью до множителя T, произведения соответствующих коэффициентов Фурье распределений $\mathscr{S}$ и $\mathscr{T}$:*

$$c_k(\mathscr{S} * \mathscr{T}) = Tc_k(\mathscr{S})\,c_k(\mathscr{T}). \quad \text{(IV, 4; 2)}$$

Поскольку свертка $\mathscr{S} * \mathscr{T}$ является суммой своего ряда Фурье, мы получаем отсюда практический способ вычисления сверток на Г. Положим

$$\mathscr{S} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\mathscr{S})\,e^{ik\omega s},$$

$$\mathscr{T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\mathscr{T})\,e^{ik\omega s};$$

тогда

$$\mathcal{S} * \mathcal{T} = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\mathcal{S})\, c_k(\mathcal{T})\, e^{ik\omega s}. \qquad \text{(IV, 4; 3)}$$

Отсюда можно вывести некоторые заключения.

1) Тот факт, что δ является единицей для свертки, связан с тем фактом, что ее коэффициенты Фурье равны $\frac{1}{T}$, и с тем, что число 1 является единицей для умножения.

2) Формула $\delta' * \mathcal{T} = \mathcal{T}'$ легко проверяется почленным дифференцированием ряда Фурье:

$$\delta' = \frac{d\delta}{ds} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} ik\omega e^{ik\omega s} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2i\pi k}{T^2} \cdot e^{ik\omega s}, \qquad \text{(IV, 4; 4)}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{T} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\mathcal{T})\, e^{ik\omega s}, \\ \mathcal{T}' &= \frac{d\mathcal{T}}{ds} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ik\omega c_k(\mathcal{T})\, e^{ik\omega s} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2i\pi k}{T} c_k(\mathcal{T})\, e^{ik\omega s}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV, 4; 5)}$$

откуда вытекает, что

$$c_k(\mathcal{T}') = T c_k(\delta')\, c_k(\mathcal{T}) \quad \text{или} \quad \mathcal{T}' = \delta' * \mathcal{T}. \qquad \text{(IV, 4; 6)}$$

3) Уравнения в свертках на Γ очень просто решаются с помощью рядов Фурье.

Пусть дано уравнение

$$\mathcal{A} * \mathcal{X} = \mathcal{B}. \qquad \text{(IV, 4; 7)}$$

Если обозначить через a_k, b_k, x_k коэффициенты Фурье распределений $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{X}$, то уравнение (IV, 4; 7) будет равносильно счетной системе уравнений

$$T a_k x_k = b_k. \qquad \text{(IV, 4; 8)}$$

Таким образом, $\mathcal{X}$ дается рядом

$$\mathcal{X} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{b_k}{a_k} e^{ik\omega s}. \qquad \text{(IV, 4; 9)}$$

Нужно еще, чтобы этот ряд имел смысл. Если все $a_k \neq 0$, то все числа $x_k = \frac{1}{T} \frac{b_k}{a_k}$ определены, и достаточно убедиться, что ряд в правой части

равенства (IV, 4; 9) сходится в $\mathscr{D}'(\Gamma)$, т. е. убедиться, что модули $\left|\frac{b_k}{a_k}\right|$ мажорируются некоторой степенью $|k|$ при $k \to \infty$.

Если некоторые коэффициенты a_k равны нулю, то правая часть $\mathscr{B}$ должна удовлетворять условиям совместности, соответствующие коэффициенты b_k также должны равняться нулю: $b_k = 0$; если эти условия удовлетворены, то значения x_k, соответствующие этим k, являются неопределенными. Таким образом, здесь, как и в крамеровской системе уравнений, имеется „столько же" степеней неопределенности, сколько имеется условий совместности для правой части. По-прежнему здесь нужна сходимость ряда (IV, 4; 9).

В частности, обратное распределение $\mathcal{A}^{-1}$ для $\mathcal{A}$ в этой сверточной алгебре удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{A} * \mathcal{A}^{-1} = \delta$$

и дается формулой

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a_k} e^{ik\omega s}. \qquad \text{(IV, 4; 10)}$$

Оно существует, если все $a_k \neq 0$ и если ряд (IV, 4; 10) является рядом Фурье некоторого распределения, т. е. если модули $|a_k|$ при $|k| \to \infty$ оцениваются снизу некоторой степенью модуля $1/|k|$.

4) В алгебре $\mathscr{D}'(\Gamma)$ имеются делители нуля. Распределение $\mathcal{A}$ является делителем нуля тогда и только тогда, когда некоторые из его коэффициентов a_k равны нулю, ибо если $a_k = 0$, то

$$\mathcal{A} * e^{ik\omega s} = T a_k e^{ik\omega s} = 0. \qquad \text{(IV, 4; 11)}$$

5) Можно решать и более сложные задачи. Например, пусть надо найти все распределения $\mathscr{X} \in \mathscr{D}'(\Gamma)$, которые удовлетворяют уравнению

$$\mathscr{X} * \mathscr{X} = \delta \qquad \text{(IV, 4; 12)}$$

(сверточное уравнение второй степени).

Для коэффициентов Фурье x_k получаются уравнения

$$T x_k^2 = \frac{1}{T}, \quad \text{откуда} \quad x_k = \pm \frac{1}{T}. \qquad \text{(IV, 4; 13)}$$

Выбор знаков $+$ и $-$ независим при различных значениях k. Все такие ряды $\sum x_k e^{ik\omega s}$ будут сходиться, поскольку $|x_k|$ ограничены числом $1/T$ при всех значениях k.

Это уравнение второй степени имеет, таким образом, бесконечное число решений мощности континуум!

Только в алгебре без делителей нуля уравнение степени m имеет, самое большее, m корней.

6) Напомним, что среди уравнений в свертках фигурируют также дифференциальные уравнения. Пусть надо решить в $\mathscr{D}'(\Gamma)$ уравнение

$$\left(\frac{d}{ds}-\lambda\right)\mathscr{X}=\mathscr{B} \qquad \text{(IV, 4; 14)}$$

или

$$(\delta'-\lambda\delta)*\mathscr{X}=\mathscr{B}. \qquad \text{(IV, 4; 15)}$$

Мы должны, таким образом, решить бесконечную систему уравнений

$$T\left(\frac{2i\pi k}{T^2}-\frac{\lambda}{T}\right)x_k=b_k. \qquad \text{(IV, 4; 16)}$$

А. Предположим сначала, что λ не равно ни одному из значений $\frac{2i\pi k}{T}=ik\omega$. Тогда числа x_k определяются однозначно:

$$x_k=\frac{b_k}{ik\omega-\lambda}. \qquad \text{(IV, 4; 17)}$$

При $|k|\to\infty$ имеем оценку $|b_k|\leqslant A|k|^{\alpha}$, и, значит, $|x_k|\leqslant(A/\omega)|k|^{\alpha-1}(1+\varepsilon)$. Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}x_k e^{ik\omega s}$ сходится к единственному решению $\mathscr{X}$. В частности, существует единственное распределение $\mathscr{A}^{-1}$, такое, что

$$\left(\frac{d}{ds}-\lambda\right)\mathscr{A}^{-1}=\delta. \qquad \text{(IV, 4; 18)}$$

Распределение $\mathscr{A}^{-1}$ равно сумме ряда

$$\mathscr{A}^{-1}=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{ik\omega-\lambda}e^{ik\omega s} \qquad \text{(IV, 4; 19)}$$

в $\mathscr{D}'(\Gamma)$.

Единственное решение уравнения (IV, 4; 14) дается тогда формулой

$$\mathscr{X}=\mathscr{A}^{-1}*\mathscr{B}, \qquad \text{(IV, 4; 20)}$$

которая, конечно, эквивалентна формуле (IV, 4; 17).

Очень легко элементарно вычислить распределение $\mathscr{A}^{-1}$. В самом деле, оно удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{d}{ds}-\lambda\right)\mathscr{A}^{-1}=0 \qquad \text{(IV, 4; 21)}$$

в области, дополнительной к точке $s=0$ на Γ.

Классическое решение этого уравнения на R имеет вид

$$\mathcal{A}^{-1} = Ce^{\lambda x}. \qquad \text{(IV, 4; 22)}$$

Рассмотрим теперь *периодическую функцию* $\tilde{f}$ на R периода T, равную $e^{\lambda x}$ в интервале $0 < x < T$.

Связанная с ней функция f на Γ равна $e^{\lambda s}$, при условии что для каждой точки окружности Γ выбирается та из криволинейных абсцисс, которая удовлетворяет неравенствам $0 < s < T$.

Функция f разрывна в точке $s = 0$. Следовательно,

$$f' = \{f'\} + \left(1 - e^{\lambda T}\right)\delta. \qquad \text{(IV, 4; 23)}$$

Тогда распределение f удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$f' - \lambda f = [\{f'\} - \lambda f] + \left(1 - e^{\lambda T}\right)\delta = \left(1 - e^{\lambda T}\right)\delta, \qquad \text{(IV, 4; 24)}$$

поскольку величина в квадратных скобках равна нулю в силу выбора функции f. Множитель $1 - e^{\lambda T}$ не равен нулю, так как λ не равно ни одному из чисел $ik\omega$ и функция

$$\frac{f}{1 - e^{\lambda T}} \qquad \text{(IV, 4; 25)}$$

служит решением уравнения (IV, 4; 18); это и есть распределение $\mathcal{A}^{-1}$, поскольку решение единственно. Впрочем, непосредственный подсчет коэффициентов Фурье этой функции дает

$$c_k\left(\frac{f}{1 - e^{\lambda T}}\right) = \frac{1}{1 - e^{\lambda T}} \int_0^T \tilde{f}(x)\, e^{-ik\omega x} \frac{dx}{T} =$$

$$= \frac{1}{1 - e^{\lambda T}} \frac{1}{T} \left[\frac{e^{(\lambda - ik\omega)x}}{\lambda - ik\omega} \right]_{x=0}^{x=T} = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{ik\omega - \lambda} = c_k\left(\mathcal{A}^{-1}\right). \qquad \text{(IV, 4; 26)}$$

Заметим, что в точках, отличных от этой точки разрыва первого рода, функция f имеет ограниченную производную; следовательно, f является функцией с ограниченным изменением, и, согласно предложению 3, ее ряд Фурье условно сходится. В частности, в точке разрыва имеем

$$\frac{1}{2} \frac{1 + e^{\lambda T}}{1 - e^{\lambda T}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{ik\omega - \lambda} = \lim_{N \to \infty} \sum_{-N}^{N}. \qquad \text{(IV, 4; 27)}$$

Речь идет о сходимости после попарной группировки членов с противоположными значениями k.

Однако ряды $\sum_{k=0}^{\infty}$ и $\sum_{k=-\infty}^{0}$ расходятся; для чисто мнимых λ это видно непосредственно, ибо с точностью до множителя $1/i$ общий член в любом из этих рядов имеет постоянный знак и эквивалентен $1/k\omega$ при $|k| \to \infty$. Напротив, если сгруппировать члены попарно, то

$$\frac{1}{ik\omega - \lambda} + \frac{1}{-ik\omega - \lambda} = \frac{-2\lambda}{\lambda^2 + k^2\omega^2} \sim -\frac{2\lambda}{k^2\omega^2} \qquad \text{(IV, 4; 28)}$$

при $k \to +\infty$. Формула (IV, 4; 27) дает некое „разложение на элементарные дроби" стоящей слева функции от λ. Эта функция имеет полюсы в точках $\lambda = ik\omega$ с вычетами, равными $-\frac{1}{T}$.

Заметим, наконец, что $f \in L^2(\Gamma)$ и что ряд $\sum \left| \frac{1}{ik\omega - \lambda} \right|^2$ является сходящимся.

В. Предположим теперь, что $\lambda = ik_0\omega$. Уравнение (IV, 4; 14) будет иметь решения, только если $b_{k_0} = 0$. Если это так, то оно имеет бесконечное число решений; коэффициент x_{k_0} является неопределенным, поскольку $e^{ik_0\omega s}$ служит решением однородного уравнения. Например, распределение $\mathscr{A}$ не имеет обратного, поскольку $c_{k_0}(\delta) \neq 0$.

Положим, в частности, $k_0 = 0$. Уравнение (IV, 4; 14) примет вид

$$\frac{d\mathscr{X}}{ds} = \mathscr{B}. \qquad \text{(IV. 4; 29)}$$

Его решение сводится к отысканию первообразной для $\mathscr{B}$. Такая первообразная существует тогда и только тогда, когда $b_0 = 0$. (Действительно, если $\tilde{f}$ — периодическая функция с периодом T на R, то она имеет первообразные функции $\tilde{F}$, но если при этом $\int_a^{a+T} \tilde{f}(x)\,dx \neq 0$, то ни одна из этих первообразных не будет периодической, поскольку $\tilde{F}(a+T) - \tilde{F}(a) \neq 0$.) В случае, когда $b_0 = 0$, все первообразные отличаются друг от друга на значение постоянной x_0; одна и только одна среди них, соответствующая значению $x_0 = 0$, в свою очередь будет иметь первообразные и так далее. Например, распределение

$$P_0 = T\delta - 1 \qquad \text{(IV, 4, 30)}$$

имеет первообразные; единственная среди них первообразная $\tilde{P}_1$ имеет нулевой коэффициент $c_0(\tilde{P}_1)$; $\tilde{P}_1$ является периодической функцией с периодом T,

равной $\frac{T}{2} - x$ на интервале $(0, T)$. Последовательно интегрируя, можно определить этим способом, одну за другой, периодические функции $\tilde{P}_m$, которые удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\tilde{P}_m = \tilde{P}_{m-1}, \\ &\int_0^T \tilde{P}_m(x)\,dx = 0. \end{aligned}\right\} \tag{IV, 4; 31}$$

На интервале $(0, T)$ распределение $\tilde{P}_m$ (которое является функцией при $m \geqslant 1$) равно некоторому полиному степени m. Этот полином называется *полиномом Бернулли*. Его разложение в ряд Фурье имеет вид

$$\tilde{P}_m = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{ik\omega}\right)^m e^{ik\omega x}. \tag{IV, 4; 32}$$

При $m \geqslant 2$ этот ряд Фурье сходится абсолютно и равномерно, следовательно, функция $\tilde{P}_m$ непрерывна, так что соответствующий полином Бернулли принимает одинаковые значения в точках $x = 0$ и $x = T$.

Полагая $x = 0$ при четном m, имеем

$$\tilde{P}_m(0) = 2(-1)^{m/2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k\omega}\right)^m, \tag{IV, 4; 33}$$

что позволяет последовательно вычислить суммы рядов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} \text{ и т. д.} \tag{IV, 4; 34}$$

Пример, который мы только что рассмотрели, можно истолковать иным способом.

Рассмотрим в векторном пространстве $\mathscr{D}'(\Gamma)$ оператор

$$A = \frac{d}{ds}. \tag{IV, 4; 35}$$

Его *собственными значениями* λ, т. е. комплексными числами λ, для которых существует такое распределение $\mathcal{T} \neq 0$, что $\left(\frac{d}{ds} - \lambda\right)\mathcal{T} = 0$, являются числа $\lambda = ik\omega$, $k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$. При $\lambda = ik\omega$ имеется один

собственный вектор, определенный с точностью до скалярного множителя; это — вектор

$$\vec{e}_k = e^{ik\omega s}. \qquad \text{(IV, 4; 36)}$$

Но, как мы уже видели для векторных пространств конечной размерности, эти векторы $\vec{e}_k$ образуют если и не базис пространства $\mathcal{D}'(\Gamma)$, то по меньшей мере „топологический базис“ в том смысле, что всякий вектор $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ может быть разложен, и притом единственным образом, по векторам $\vec{e}_k$. Это разложение как раз и есть *разложение Фурье* распределения $\mathcal{T}$. Оператор A выражается в этом базисе формулами

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{T} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\mathcal{T})\, e^{ik\omega s}, \\ A\mathcal{T} &= \frac{d\mathcal{T}}{ds} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ik\omega c_k(\mathcal{T})\, e^{ik\omega s}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV, 4; 37)}$$

Таким образом, разложение Фурье является спектральным разложением пространства $\mathcal{D}'(\Gamma)$, *соответствующим оператору* $A = \frac{d}{ds}$.

Можно было бы попытаться заменить пространство $\mathcal{D}'(\Gamma)$ пространством $L^2(\Gamma)$, однако оператор $\frac{d}{ds}$ выводит из этого пространства. Напротив, оператор $\frac{d}{ds}$ можно заменить произвольным оператором свертки в $\mathcal{D}'(\Gamma)$. Оператор $\mathcal{T} \to \mathcal{A} * \mathcal{T}$ обладает собственными векторами $e^{ik\omega s}$ при собственных значениях $Tc_k(\mathcal{A}) = Ta_k$.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ IV

Упражнение IV-1. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π, равную x при $-\pi < x < \pi$.

Вычислить $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Упражнение IV-2. Разложить в ряды по синусам каждую из функций $u_0(x)$, приведенных в упражнениях VII-1, VII-2, VII-3 и VII-4.

Упражнение IV-3. Разложить в ряд Фурье функцию $e^{\alpha e^{ix}}$, где α — произвольное комплексное число. Доказать формулу

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2\alpha\cos x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n}}{(n!)^2}.$$

Прийти отсюда к формуле (IX, 1; 73) с $\nu=0$.

Упражнение IV-4. 1°. Пусть $\mathcal{T}$ — распределение периода T. Показать, что его ряд Фурье можно представить в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos\frac{2\pi nx}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{2\pi nx}{T},$$

и найти выражения для коэффициентов a_n и b_n.

В двух следующих вопросах положено

$$\check{\varphi}(x) = \varphi(-x),$$

где $\varphi(x)$ — функция.

2°. Говорят, что распределение $\mathcal{T}$ нечетно, если

$$<\mathcal{T}, \check{\varphi}> = -<\mathcal{T}, \varphi> \text{ для любой } \varphi\in\mathcal{D}.$$

Показать, что ряд Фурье нечетного распределения периода T сводится к ряду по синусам.

3°. Говорят, что распределение $\mathcal{T}$ четно, если

$$<\mathcal{T}, \check{\varphi}> = <\mathcal{T}, \varphi> \text{ для любой } \varphi\in\mathcal{D}.$$

Показать, что ряд Фурье четного распределения периода T сводится к ряду по косинусам.

Упражнение IV-5. Разложить в ряд Фурье распределение периода 1, равное на интервале $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ распределению $-\delta_{(-b)}+\delta_{(b)}$, где $0<b<\frac{1}{2}$.

Упражнение IV-6. Пусть

$$U(x) = \begin{cases} +1 \text{ при } 2k < x < 2k+1, \\ -1 \text{ при } 2k+1 < x < 2k+2, \end{cases}$$

где k — любое целое число.

1°. Разложить $U(x)\cos\pi x$ в ряд **Фурье:**

a) в ряд по экспонентам,

b) в ряд по синусам.

2°. Разложить в ряд по экспонентам распределение

$$2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta'_{(-n)}-\pi^2U(x)\cos\pi x.$$

3°. Решить в $\mathscr{D}'(\Gamma)$, где Γ — окружность длины 1, уравнение

$$X*\cos\pi s=2\delta'-\pi^2\cos\pi s.$$

Проверить полученный результат.

Упражнение IV-7. Определим распределение

$$\operatorname{vp}\operatorname{ctg}x=(\lg|\sin x|)'.$$

Показать, что $(\operatorname{vp}\operatorname{ctg}x)\cos x=\sin x$ и что $\operatorname{vp}\operatorname{ctg}x$ является нечетным распределением периода π. Вывести отсюда его разложение в ряд Фурье.

Упражнение IV-8. [Доказательство формул (IV, 3; 19) и (IV, 3; 20).]

Пусть f и g – две периодические функции с периодом T из пространства $L^2(T)$. Показать, что функция

$$h(x)=\frac{1}{T}\int_0^T f(x+t)\,g(t)\,dt$$

также будет периодической с периодом T и также будет принадлежать $L^2(T)$. Выразить коэффициенты Фурье $c_n(h)$ функции h через коэффициенты Фурье $c_n(f)$ и $c_n(g)$ функций f и g.

Допуская, что при любом x ряд Фурье функции $h(x)$ сходится к $h(x)$, доказать формулу (IV, 3; 20) для f и g и формулу (IV, 3; 19), например, для f.

Упражнение IV-9. 1°. Разложить функцию $f(x)=|\sin^3x|$ в тригонометрический ряд по косинусам. Представить коэффициент a_n в виде рациональной дроби $P(n)/Q(n)$.

Сходится ли ряд Фурье? Сходятся ли продифференцированные ряды Фурье? Написать формулу Парсеваля.

2°. Вычислить непосредственно

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+1\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}+9\right)f$$

в смысле теории распределений. Показать, что этот результат позволяет снова получить разложение Фурье функции f без вычисления интегралов (функция f рассматривается как решение некоторого дифференциального уравнения).

Упражнение IV-10. Разложить в ряд Фурье функции, равные x и x^3 на интервале $-\pi < x < \pi$. Получить отсюда сумму ряда

$$\sin x - \frac{\sin 2x}{2^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \ldots + (-1)^n \frac{\sin nx}{n^3} + \ldots$$

при всех значениях x. Показать, что найденные разложения можно получить из разложения $\delta_{(\pi)}$.

Упражнение IV-11. Пусть дана функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} & \text{при} \quad 0 < x < \frac{\pi}{3}, \\ 0 & \text{при} \quad \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}, \\ -\frac{\pi}{3} & \text{при} \quad \frac{2\pi}{3} < x < \pi. \end{cases}$$

Показать, что ее можно записать сразу во всех трех интервалах в виде суммы ряда по синусам или ряда по косинусам. Найти суммы этих двух рядов при $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{2\pi}{3}$ и $x = \pi$, а также для произвольного значения x.

Проверить найденные разложения, дифференцируя $f(x)$ как распределение.

Упражнение IV-12. Разложить в ряды Фурье функции, равные $\sin mx$, $\cos mx$ и $\frac{e^{mx} + e^{-mx}}{e^{m\pi} - e^{-m\pi}}$ при $-\pi < x < \pi$ [1]).

Упражнение IV-13. Построить кривую, определяемую уравнением

$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin ny \cos nx}{n^3} = 0.$$

Упражнение IV-14. Пусть $S_n(x) = 2 \sum_{1}^{n} (-1)^{p-1} \frac{\sin px}{p}$.

Определить абсциссы относительных максимумов и минимумов на интервале $0 < x < \pi$. Функция S_n достигает своего максимума y_n в точке

[1]) В первых двух функциях m — произвольное комплексное число. В последней — число $m \neq ki$, где k — целое. — *Прим. перев.*

$x = \frac{n\pi}{n+1}$. Показать, что

$$\lim_{n \to \infty} y_n = 2 \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$$

и что это число $> \pi$.

Какое заключение можно отсюда сделать?

Упражнение IV-15. Замечание. Все функции и распределения, которые встречаются ниже, являются периодическими (с периодом 1). Символом $\mathscr{D}$ обозначено пространство бесконечно дифференцируемых функций φ на $(0, 1)$, таких, что $\varphi^{(n)}(0) = \varphi^{(n)}(1)$ при любом n.

Таким образом, $\mathscr{D}$ можно интерпретировать как пространство функций на единичной окружности, лежащей в плоскости. В силу нашего выбора периода разложение в ряд Фурье распределения $T \in \mathscr{D}'$ записывается в виде

$$T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle T_\xi, \ e^{2\pi i n (x-\xi)} \rangle.$$

1°. Говорят, что распределение $T \in \mathscr{D}'$ является *положительно определенным* (и пишут $T \gg 0$), если все коэффициенты Фурье распределения T положительны.

Для любой функции φ из $\mathscr{D}$ положим

$$(\varphi * \tilde{\varphi})(x) = \int_0^1 \varphi(t) \overline{\varphi(t-x)} dt.$$

Доказать следующий результат.

Для того чтобы $T \gg 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\langle T, \varphi * \tilde{\varphi} \rangle$ было $\geqslant 0$ при любой $\varphi \in \mathscr{D}$. Перед этим быстро показывается, что $\langle T, \varphi * \tilde{\varphi} \rangle$ имеет смысл при $\varphi \in \mathscr{D}$, т. е. что из $\varphi \in \mathscr{D}$ вытекает, что $\varphi * \tilde{\varphi} \in \mathscr{D}$.

Привести несколько простых примеров распределений $\gg 0$. Всякое ли распределение $T \gg 0$ является положительным распределением, т. е. таким, что $\langle T, \varphi \rangle \geqslant 0$ при положительной φ?

Обратно, всякое ли положительное распределение является положительно определенным распределением?

Проверьте все ответы на примерах. Приведите пример распределения, являющегося одновременно положительным и положительно определенным.

2°. Рассмотрим непрерывную функцию $f(x)$ вещественного переменного, периодическую с периодом 1, которая является положительно определенным распределением. Доказать следующий результат:

каковы бы ни были вещественные числа $x_1, \ldots, x_l$, квадратичная форма с коэффициентами $a_{ij} = f(x_i - x_j)$ является эрмитовой положительно опре-

деленной формой; иными словами, $\sum_{i,j} a_{ij}\xi_i\bar{\xi}_j \geqslant 0$, каковы бы ни были l комплексных чисел $\xi_1, \ldots, \xi_l$.

Чтобы доказать этот результат, нужно отправляться от определения $\langle f, \varphi * \check{\varphi}\rangle \geqslant 0$ и заставить функцию φ пробежать подходящие последовательности.

Доказать следующие свойства функции f:

$f(-x) = \overline{f(x)}$; $|f(x)| \leqslant f(0)$ (и, значит, $f(0) \geqslant 0$) при любом x.

3°. a) Установить необходимое и достаточное условие для того, чтобы периодическое распределение T было производной некоторого периодического распределения S.

Имеет ли периодическое распределение S первообразную?

b) В дальнейшем X будет обозначать неизвестное периодическое распределение. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{d^m X}{dx^m} + a_1 \frac{d^{m-1} X}{dx^{m-1}} + \ldots + a_m X = S,$$

где S — периодическое распределение.

Подбирая a_i и S, дать примеры для следующих случаев:

1) S имеет первообразную, но решения X не существует;

2) S не имеет первообразной, а уравнение имеет решение;

3) распределение

$$\frac{d^m \delta}{dx^m} + a_1 \frac{d^{m-1}\delta}{dx^{m-1}} + \ldots + a_m \delta$$

является положительно определенным, но решений не существует;

4) распределение

$$\frac{d^m \delta}{dx^m} + a_1 \frac{d^{m-1}\delta}{dx^{m-1}} + \ldots + a_m \delta$$

не является положительно определенным, а решение существует.

Упражнение IV-16. (Письменный экзамен, Париж, 1958 г.)

Первый вопрос.

Обозначим через $f(x)$ периодическую функцию с периодом 2π, которая совпадает с $\operatorname{ch} \lambda x$ (λ — вещественное число > 0), на интервале $(-\pi, \pi)$. Найти ее разложение в ряд Фурье, вычисляя коэффициенты обычным методом.

Второй вопрос.

Показать, что f, в смысле теории распределений, удовлетворяет дифференциальному уравнению вида $f'' - \lambda^2 f = A$. Записав f в виде ряда Фурье с неизвестными коэффициентами, показать, что это дифференциальное уравнение снова дает коэффициенты Фурье, вычисленные при ответе на первый вопрос.

Третий вопрос.

Что дает найденное разложение Фурье при $x = \pi$? Вывести отсюда разложение в ряд функции $\pi \frac{\operatorname{ch} \lambda\pi}{\operatorname{sh} \lambda\pi}$. Выбирая подходящую первообразную по λ и потенцируя затем найденный результат, получить разложение $\operatorname{sh} \lambda\pi$ в бесконечное произведение. Прийти к этому разложению из одного разложения, данного в курсе.

Упражнение IV-17. (Ряды Фурье в R^2.) Пусть $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2)$ — функция, определенная на R^2 и имеющая периоды $(T_1, 0)$ и $(0, T_2)$.

1°. Показать, что если существует двойной равномерно сходящийся ряд вида

$$\sum_{p,\, q=-\infty}^{\infty} c_{p,\,q} e^{2\pi i \left(\frac{px_1}{T_1} + \frac{qx_2}{T_2}\right)} \tag{1}$$

с суммой $f(\vec{x})$, то обязательно

$$c_{mn} = \frac{1}{T_1 T_2} \iint\limits_{\substack{\alpha_1 \leqslant x_1 \leqslant \alpha_1 + T_1 \\ \alpha_2 \leqslant x_2 \leqslant \alpha_2 + T_2}} f(x_1, x_2)\, e^{-2\pi i \left(\frac{mx_1}{T_1} + \frac{nx_2}{T_2}\right)} dx_1\, dx_2, \tag{2}$$

причем правая часть не зависит от α_1 и α_2.

2°. Рядом Фурье для достаточно регулярной функции $f(\vec{x})$ с периодами $(T_1, 0)$ и $(0, T_2)$ называют ряд (1), в котором коэффициенты c_{pq} даются формулами (2).

Показать, что ряд (1) можно также записать в виде

$$\sum_{m,\, n=0}^{\infty} a_{mn} \cos \frac{2\pi m x_1}{T_1} \cos \frac{2\pi n x_2}{T_2} + \sum_{m,\, n=1}^{\infty} b_{mn} \sin \frac{2\pi m x_1}{T_1} \sin \frac{2\pi n x_2}{T_2} +$$

$$+ \sum_{m,\, n=0}^{\infty} d_{mn} \cos \frac{2\pi m x_1}{T_1} \sin \frac{2\pi n x_2}{T_2} + \sum_{m,\, n=0}^{\infty} e_{mn} \sin \frac{2\pi m x_1}{T_1} \cos \frac{2\pi n x_2}{T_2},$$

и найти выражения для коэффициентов a_{mn}, b_{mn}, d_{mn}, e_{mn}.

Разобрать частный случай, когда $f(x_1, x_2)$ имеет вид $g(x_1) \otimes h(x_2)$.

3°. Показать, что если при фиксированном x_2 функция $x_1 \to f(x_1, x_2)$ нечетна и при фиксированном x_1 функция $x_2 \to f(x_1, x_2)$ также нечетна, то ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ сводится к сумме

$$\sum_{m, n=1}^{\infty} b_{mn} \sin \frac{2\pi m x_1}{T_1} \sin \frac{2\pi n x_2}{T_2},$$

где

$$\frac{b_{mn}}{4} = \frac{4}{T_1 T_2} \int_0^{T_1/2} dx_1 \int_0^{T_2/2} dx_2 f(x_1, x_2) \sin \frac{2\pi m x_1}{T_1} \sin \frac{2\pi n x_2}{T_2}.$$

4°. Написать ряд Фурье функции $f(x_1, x_2)$, которая при фиксации одного из переменных является четной по другому переменному.

5°. Пусть функция $f(x_1, x_2)$ задана в прямоугольнике

$$0 \leqslant x_1 \leqslant A_1, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant A_2.$$

Как следует продолжить ее, чтобы ее ряд Фурье имел вид

$$\sum_{m, n=1}^{\infty} b_{mn} \sin \frac{\pi m x_1}{A_1} \sin \frac{\pi n x_2}{A_2}. \tag{3}$$

Применение. Разложить в ряд Фурье вида (3) функцию $f_0(x_1, x_2)$, определенную на прямоугольнике $0 \leqslant x_1 \leqslant A_1$, $0 \leqslant x_2 \leqslant A_2$ следующим образом:

$$f_0(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{2h}{A_1}(A_1 - x_1), & \text{в области I}, \\ \frac{2h}{A_1} x_1, & \text{в области II}, \\ \frac{2h}{A_2}(A_2 - x_2), & \text{в области III}, \\ \frac{2h}{A_2} x_2, & \text{в области IV}, \end{cases}$$

где h — данная положительная постоянная, а области I, II, III и IV ограничены диагоналями прямоугольника, как показано на рисунке.

Используя результаты гл. VII, § 2, п. 3, можно написать решение $u(x_1, x_2; t)$ уравнения колебаний мембраны для предыдущего прямоуголь-

ника. Мембрана закреплена по краям и удовлетворяет начальным условиям

$$u_0(x_1, x_2) = f_0(x_1, x_2),$$
$$u_1(x_1, x_2) = 0.$$

(Переменные x_1 и x_2 суть переменные x и y гл. VII.)

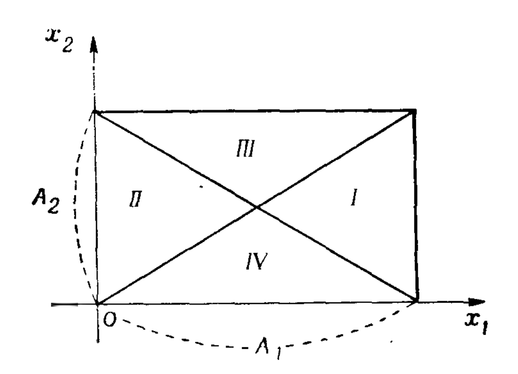


Рис. IV, 1.

Упражнение IV-18. (Периодическое распределение на R^2.) Пусть $\mathcal{W}_{x_1, x_2} = \mathcal{S}_{x_1} \otimes \mathcal{T}_{x_2}$ — распределение на R^2, которое является тензорным произведением распределения $\mathcal{S}_{x_1}$ с периодом T_1 и распределения $\mathcal{T}_{x_2}$ с периодом T_2. Пусть $c_m(\mathcal{S})$ и $c_m(\mathcal{T})$ — коэффициенты Фурье распределений $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$. Рядом Фурье для $\mathcal{W}$ называется ряд

$$\sum_{m, n = -\infty}^{\infty} c_m(\mathcal{S})\, c_n(\mathcal{T})\, e^{2\pi i \left(\frac{m x_1}{T_1} + \frac{n x_2}{T_2}\right)}.$$

На плоскости R^2 рассматривается прямоугольник $-A_i \leqslant x_i \leqslant A_i$, $i = 1, 2$.

Пусть $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ — некоторая точка этого прямоугольника, причем $0 < \alpha_i < A_i$, $i = 1, 2$.

Пусть

$$-\vec{\alpha} = (-\alpha_1, -\alpha_2), \quad \vec{\beta} = (-\alpha_1, \alpha_2), \quad \vec{\gamma} = (\alpha_1, -\alpha_2).$$

Разложить в ряд Фурье распределение с периодами $(2A_1, 0)$ и $(0, 2A_2)$, которое на прямоугольнике равно

$$\delta_{(\vec{\alpha})} + \delta_{(-\vec{\alpha})} - \delta_{(\vec{\beta})} - \delta_{(\vec{\gamma})}.$$

Найти для прямоугольника $0 \leqslant x_i \leqslant A_i$, $i = 1, 2$, решение уравнения колебаний мембраны, которое равно нулю на краях и удовлетворяет начальным условиям

$$u_0(x_1, x_2) = 0,$$

$$u_1(x_1, x_2) = \delta_{(\vec{\alpha})}.$$

ГЛАВА V

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

§ 1. Преобразование Фурье функции одного переменного

1. Введение. Пусть $f(x)$ — не периодическая, локально суммируемая функция. Обозначим через $f_T(x)$ функцию, равную $f(x)$ на интервале $\left(-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right)$ и продолженную вне этого интервала как периодическая функция с периодом T. При $T \to \infty$ функция f_T стремится к f равномерно на любом конечном интервале. Функцию f_T можно разложить в ряд Фурье:

$$\left.\begin{aligned} f_T(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,T} e^{ni\omega x}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \\ c_{n,T} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) e^{-ni\omega x} dx. \end{aligned}\right| \tag{V, 1; 1}$$

Рассмотрим интервал $(\lambda, \lambda + \Delta\lambda)$. Число значений n, при которых $2\pi\lambda < n\omega \leqslant 2\pi(\lambda + \Delta\lambda)$, равно $2\pi\frac{\Delta\lambda}{\omega}$ (с погрешностью $\leqslant 2$). Пачку соответствующих членов

$$\sum_{2\pi\lambda \leqslant n\omega \leqslant 2\pi(\lambda+\Delta\lambda)} c_{n,T} e^{ni\omega x}$$

можно приближенно записать в виде

$$c_\lambda 2\pi \frac{\Delta\lambda}{\omega} e^{2\pi i\lambda x} = c_\lambda T\, \Delta\lambda e^{2\pi i\lambda x}, \tag{V, 1; 2}$$

где

$$c_\lambda = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) e^{-2\pi i\lambda x} dx. \tag{V, 1; 3}$$

Таким образом, эта пачка членов принимает вид

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{2\pi\lambda \leqslant n\omega \leqslant 2\pi(\lambda+\Delta\lambda)} c_{n,T} e^{ni\omega x} \approx C(\lambda)\, e^{2i\pi\lambda x}\,\Delta\lambda, \\ &C(\lambda) = \int_{-T/2}^{+T/2} f(x)\, e^{-2\pi i\lambda x}\, dx, \quad C(\lambda) = Tc_{\lambda}. \end{aligned}\right\} \qquad (V, 1; 4)$$

При $T \to \infty$ можно заменить $\int_{-T/2}^{+T/2}$ на $\int_{-\infty}^{+\infty}$; кроме того, сумму $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ можно записать как сумму пачек, соответствующих интервалам

$$(0, \Delta\lambda),\ (\Delta\lambda, 2\,\Delta\lambda),\ \ldots,\ (k\,\Delta\lambda,\ (k+1)\,\Delta\lambda),\ \ldots,$$
$$(-\Delta\lambda,\ 0),\ (-2\,\Delta\lambda,\ -\Delta\lambda),\ \ldots,\ (-(k+1)\,\Delta\lambda,\ -k\,\Delta\lambda),\ \ldots$$

ширины $\Delta\lambda$, каждая из которых записывается в виде (V, 1; 4). Таким образом, мы приходим интуитивно к формулам

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda)\, e^{2\pi i\lambda x}\, d\lambda, \qquad (V, 1; 5)$$

$$C(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i\lambda x}\, dx. \qquad (V, 1; 6)$$

Ряд Фурье с суммой f заменяется интегралом Фурье (V, 1; 5); коэффициент Фурье $C(\lambda)$ дается равенством (V, 1; 6).

То, что мы сейчас проделали, не имеет, естественно, ничего общего со строгим доказательством. Мы собираемся изучить положение вещей более внимательно.

2. Преобразование Фурье. Определение. Пусть $f(x)$ — комплекснозначная функция вещественного переменного x. Образом Фурье, или преобразованием Фурье, функции f называется комплекснозначная функция $C(\lambda)$ вещественного переменного λ:

$$C(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\lambda x} f(x)\, dx. \qquad (V, 1; 7)$$

В частности,

$$C(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx. \qquad (V, 1; 8)$$

Пишут

$$C = \mathcal{F} f \quad \text{или} \quad C(\lambda) = \mathcal{F}[f(x)]. \qquad (V, 1; 9)$$

Наряду с преобразованием $\mathscr{F}$ мы определим преобразование

$$C_1 = \overline{\mathscr{F}} f, \quad C_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \lambda x} f(x)\, dx. \qquad \text{(V, 1; 10)}$$

Преобразования $\mathscr{F} f$ и $\overline{\mathscr{F}} f$, очевидно, существуют, если f суммируема ($f \in L^1$); в этом случае они являются непрерывными функциями от λ в силу теоремы Лебега (см. предложение 45 гл. I; функции $e^{\pm 2\pi i \lambda x} f(x)$ непрерывны по λ при фиксированном x и мажорируются по модулю функцией $|f(x)|$ — суммируемой функцией, не зависящей от λ). Преобразования $\mathscr{F} f$ и $\overline{\mathscr{F}} f$ ограничены:

$$|C(\lambda)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = \|f\|_{L^1}. \qquad \text{(V, 1; 11)}$$

Можно показать (теорема, принадлежащая Лебегу), что $C(\lambda)$ стремится к 0 при $\lambda \to \pm\infty$.

Преобразование $\mathscr{F} f$ можно определить также и в других случаях.

Например, в случае, когда $f(x)$ по отдельности при $x > 0$ и при $x < 0$ является монотонной функцией, стремящейся к 0 при $|x| \to \infty$. Или же в случае, когда f имеет ограниченное изменение и является, следовательно, конечной комбинацией монотонных функций. Теорема Абеля позволяет утверждать, что в этом случае функция $C(\lambda)$ непрерывна при $\lambda \neq 0$; кроме того, справедлива оценка

$$|C(\lambda)| \leqslant \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} |df| = \text{полное изменение } f\right)}{2\pi |\lambda|}, \qquad \text{(V, 1; 12)}$$

и, значит, опять-таки $C(\lambda) \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$. [Эта оценка, использованная при доказательстве теоремы Абеля, получается сразу же интегрированием по частям, если f имеет непрерывную производную; мы вернемся к ней ниже, см. формулу (V, 1; 16).]

3. Основные формулы и оценки. Предположим, что $f \in L^1$, что f непрерывна и дифференцируема и что $f' \in L^1$. Интегрируя по частям при $\lambda \neq 0$, получим

$$\int_{-A}^{A} e^{-2\pi i \lambda x} f(x)\, dx = \left[\frac{e^{-2\pi i \lambda x}}{-2\pi i \lambda} f(x)\right]_{x=-A}^{x=+A} - \int_{-A}^{A} \frac{e^{-2\pi i \lambda x}}{-2\pi i \lambda} f'(x)\, dx. \qquad \text{(V, 1; 13)}$$

Устремим A к ∞; тогда член в квадратных скобках будет стремиться к нулю. Покажем, в самом деле, что $f(x)$ стремится к 0 при $|x| \to \infty$. Имеем

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt.$$

Поскольку f' суммируема, функция $f(x)$ имеет конечный предел при $x \to \pm\infty$, а именно $f(\pm\infty) = f(0) + \int_0^{\pm\infty} f'(t)\,dt$; но этот предел не может быть отличен от нуля, так как тогда функция f не была бы суммируемой. Интегральный член имеет своим пределом интеграл, поскольку f' суммируема. Отсюда окончательно

$$C(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i\lambda x}}{2\pi i\lambda} f'(x)\,dx \quad \text{при} \quad \lambda \neq 0. \qquad \text{(V, 1; 14)}$$

Эту формулу можно записать также в виде

$$2\pi i\lambda C(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\lambda x} f'(x)\,dx = \mathcal{F} f'. \qquad \text{(V, 1; 15)}$$

Теперь, по непрерывности, она будет справедливой также и при $\lambda = 0$ [обе части ее равны при этом нулю; левая — поскольку она содержит множителем λ, а правая — поскольку она равна интегралу $\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,dx = f(+\infty) - f(-\infty) = 0$]. Отсюда мы получаем важную оценку:

$$|2\pi\lambda|\,|C(\lambda)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|\,dx = \|f'\|_{L^1}. \qquad \text{(V, 1; 16)}$$

Вообще если функция f m раз непрерывно дифференцируема и если ее производные порядка $\leqslant m$ суммируемы, имеем

$$(2i\pi\lambda)^m C(\lambda) = \mathcal{F} f^{(m)}, \qquad \text{(V, 1; 17)}$$

$$|2\pi\lambda|^m\,|C(\lambda)| \leqslant \|f^{(m)}\|_{L^1}. \qquad \text{(V, 1; 18)}$$

Аналогичные формулы, с заменой $2\pi i\lambda$ на $-2\pi i\lambda$, имеют место для преобразования $\overline{\mathcal{F}}$.

Выясним теперь, будет ли $C(\lambda)$ дифференцируемой. Формально

$$C'(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} (-2i\pi x)\, e^{-2i\pi\lambda x} f(x)\, dx. \qquad \text{(V, 1; 19)}$$

Это дифференцирование под знаком $\int$ законно, если полученный интеграл сходится и притом равномерно по λ, когда λ пробегает конечный интервал. Этот случай реализуется, *если $xf(x)$ суммируема*. Тогда имеем

$$C'(\lambda) = \mathcal{F}[-2i\pi x f(x)]. \qquad \text{(V, 1; 20)}$$

Вообще если $x^m f(x)$ также суммируема, то $C(\lambda)$ m раз непрерывно дифференцируема и

$$C^{(m)}(\lambda) = \mathcal{F}[(-2\pi i x)^m f(x)], \qquad \text{(V, 1; 21)}$$

$$|C^{(m)}(\lambda)| \leqslant \|(2\pi x)^m f(x)\|_{L^1}. \qquad \text{(V, 1; 22)}$$

В итоге *чем больше (суммируемых) производных имеет функция $f(x)$, тем быстрее $C(\lambda)$ убывает на бесконечности; чем быстрее $f(x)$ убывает на бесконечности, тем больше (ограниченных) производных имеет $C(\lambda)$.*

Аналогичные результаты, с заменой $-2\pi i x$ на $2\pi i x$, справедливы для оператора $\overline{\mathcal{F}}$.

Резюмируем предыдущие результаты в виде теоремы.

Предложение 1. *Всякая суммируемая функция $f(x)$ имеет преобразование Фурье:*

$$\mathcal{F}f = C, \quad C(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\lambda x} f(x)\, dx. \qquad \text{(V, 1; 23)}$$

Это преобразование непрерывно, ограничено и стремится к 0 при $|\lambda| \to \infty$:

$$|C(\lambda)| \leqslant \|f\|_{L^1}. \qquad \text{(V, 1; 24)}$$

Если f m раз непрерывно дифференцируема и ее производные порядка $\leqslant m$ суммируемы, то

$$\mathcal{F}[f^{(m)}] = (2i\pi\lambda)^m C(\lambda), \qquad \text{(V, 1; 25)}$$

$$|2\pi\lambda|^m\, |C(\lambda)| \leqslant \|f^{(m)}\|_{L^1}.$$

Если $x^m f(x)$ суммируема, то $C(\lambda)$ m раз непрерывно дифференцируема и

$$\mathcal{F}[(-2i\pi x)^m f(x)] = C^{(m)}(\lambda), \qquad (V, 1; 26)$$
$$|C^{(m)}(\lambda)| \leqslant \|(2\pi x)^m f(x)\|_{L^1}.$$

Мы имеем также

Предложение 2. *Если $C(\lambda) = \mathcal{F}[f(x)]$, то*

$$\frac{1}{|k|} C\left(\frac{\lambda}{k}\right) = \mathcal{F}[f(kx)], \quad k \text{ — вещественное} \neq 0. \qquad (V, 1; 27)$$

В самом деле, замена переменного $kx = \xi$ дает

$$\mathcal{F}[f(kx)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\lambda x} f(kx)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\lambda\frac{\xi}{k}} f(\xi) \frac{d\xi}{|k|} = \frac{1}{|k|} C\left(\frac{\lambda}{k}\right).$$

В частности,

$$C(-\lambda) = \mathcal{F}[f(-x)], \qquad (V, 1; 28)$$

и, следовательно, при четной f функция C будет тоже четной, а при нечетной — нечетной.

4. Пространство $\mathcal{S}$ бесконечно дифференцируемых функций, все производные которых быстро убывают. Пространство $\mathcal{S}$ — это пространство комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций на R, убывающих при $|x| \to \infty$ вместе с любой из своих производных быстрее, чем любая степень $1/|x|$.

Следствия. Если $\varphi \in \mathcal{S}$, то

1) каковы бы ни были неотрицательные целые числа l и m ($l, m \geqslant 0$), функция $x^l \varphi^{(m)}(x)$ ограничена и даже суммируема, ибо из того, что $x^{l+2}\varphi^{(m)}(x)$ ограничена постоянной M, вытекает, что $x^l \varphi^{(m)}(x)$ ограничена функцией M/x^2 и, значит, суммируема;

2) каковы бы ни были неотрицательные целые числа l и m ($l, m \geqslant 0$), функция $(x^l \varphi(x))^{(m)}$ ограничена и суммируема.

Здесь надо воспользоваться формулой Лейбница, дающей производные от произведения.

Топология в пространстве $\mathcal{S}$

Последовательность функций φ_j из $\mathcal{S}$ стремится к 0, когда $j \to \infty$ в смысле топологии пространства $\mathcal{S}$, если для любых целых неотрицательных чисел l и m ($l, m \geqslant 0$) последовательность $x^l \varphi_j^{(m)}(x)$ сходится к нулю равномерно на R.

Для преобразования Фурье в пространстве $\mathcal{S}$ справедливо предложение:

Предложение 3. *Если функция $\varphi(x)$ принадлежит $(\mathcal{S})_x$, то ее преобразование Фурье $C(\lambda)$ принадлежит $(\mathcal{S})_\lambda$. Кроме того, если*

функции $\varphi_j(x)$ *стремятся к нулю в* $(\mathscr{S})_x$ *при* $j\to\infty$, *то их преобразования Фурье* $C_j(\lambda)$ *стремятся к* 0 *в* $(\mathscr{S})_\lambda$.

Доказательство

1) Если $\varphi\in\mathscr{S}$, то при любом целом $l\geqslant 0$ функция $x^l\varphi(x)$ суммируема и в силу второй части предложения 1 функция $C(\lambda)$ бесконечно дифференцируема.

2) Каково бы ни было целое число $l\geqslant 0$, производная функции $C(\lambda)$ порядка l убывает при $|\lambda|\to\infty$ быстрее, чем любая степень $1/|\lambda|$. При этом имеет место точная оценка:

$$|(2\pi\lambda)^m C^{(l)}(\lambda)|\leqslant\|((2i\pi x)^l\varphi(x))^{(m)}\|_{L^1}. \qquad (V, 1; 29)$$

3) Пусть теперь последовательность φ_j стремится к 0 в смысле $\mathscr{S}$. Тогда, согласно формуле (V, 1; 29), имеем

$$|(2\pi\lambda)^m C_j^{(l)}(\lambda)|\leqslant\|((2i\pi x)^l\varphi_j(x))^{(m)}\|_{L^1}, \qquad (V, 1; 30)$$

причем в правой части этого неравенства стоит последовательность чисел, стремящихся к 0 при $j\to\infty$. Следовательно, функции $\lambda^m C_j^{(l)}(\lambda)$ при $j\to\infty$ стремятся к нулю равномерно на всей прямой. Ч. и т. д.

5. Примеры. 1) Пусть

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{при } |x|\leqslant A,\\ 0 & \text{при } |x|>A.\end{cases}$$

Ее преобразованием Фурье будет функция

$$C(\lambda)=\int_{-A}^{A}e^{-2i\pi\lambda x}\,dx=\frac{\sin 2\pi\lambda A}{\pi\lambda}. \qquad (V, 1; 31)$$

Заметим, что f не является непрерывно дифференцируемой. Тем не менее $|\lambda C(\lambda)|$ ограничен; однако $|\lambda^2 C(\lambda)|$ не ограничен. Поскольку f имеет ограниченный носитель, функция $x^m f(x)$ суммируема при любом m; легко проверить, что $C(\lambda)$ бесконечно дифференцируема и что каждая из ее производных ограничена. Имеем $\|f\|_{L^1}=2A$ и в точности $|C(\lambda)|\leqslant 2A=C(0)$.

2) Пусть $f(x)=e^{-\pi x^2}$.

Тогда

$$C(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi x^2-2i\pi\lambda x}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi(x+i\lambda)^2-\pi\lambda^2}\,dx. \qquad (V, 1; 32)$$

Чтобы вычислить этот интеграл по x (при фиксированном λ), введем комплексное переменное $Z = x + i\lambda$:

$$C(\lambda) = e^{-\pi\lambda^2} \int_{i\lambda-\infty}^{i\lambda+\infty} e^{-\pi Z^2} dZ. \qquad \text{(V, 1; 33)}$$

Функция $e^{-\pi Z^2}$ является голоморфной целой функцией, что позволит нам сразу же изменить путь интегрирования. Имеем

$$\int_{i\lambda-\infty}^{i\lambda+\infty} = \lim_{A\to\infty} \int_{i\lambda-A}^{i\lambda+A} = \lim_{A\to\infty} \left[\int_{i\lambda-A}^{-A} + \int_{-A}^{A} + \int_{A}^{i\lambda+A} \right]. \qquad \text{(V, 1; 34)}$$

Первый и третий интегралы в правой части стремятся к 0 при $A \to \infty$.

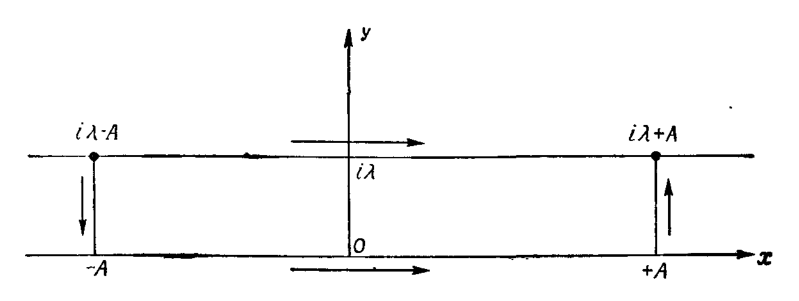


Рис. V, 1.

В самом деле, рассмотрим, например, третий интеграл:

$$\left| \int_{A}^{i\lambda+A} e^{-\pi Z^2} dZ \right| = \left| \int_{0}^{\lambda} e^{-\pi(A^2-y^2)-2i\pi Ay} i\, dy \right| \leqslant |\lambda| \, e^{-\pi(A^2-\lambda^2)}. \qquad \text{(V, 1; 35)}$$

Эта величина при фиксированном λ стремится к нулю, когда $A \to \infty$. Таким образом,

$$C(\lambda) = e^{-\pi\lambda^2} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} e^{-\pi Z^2} dZ = e^{-\pi\lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = e^{-\pi\lambda^2}, \qquad \text{(V, 1; 36)}$$

поскольку последний интеграл (интеграл Гаусса) равен 1. Окончательно

$$\mathcal{F}\,[e^{-\pi x^2}] = e^{-\pi\lambda^2}\,[1]). \qquad \text{(V, 1; 37)}$$

Применяя предложение 2 с $k > 0$, получим

$$\mathcal{F}\left[e^{-kx^2}\right] = \mathcal{F}\left[e^{-\pi(\sqrt{k/\pi}x)^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{k}}\, e^{-\pi(\sqrt{\pi/k}\,x)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{k}}\, e^{-(\pi^2/k)\,x^2}. \qquad \text{(V, 1; 38)}$$

Заметим, что $e^{-\pi x^2} \in (\mathcal{S})_x$ и что также $e^{-\pi\lambda^2} \in (\mathcal{S})_\lambda$.

3) Пусть $f(x) = Y(x)\, e^{-ax} \dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, где $\alpha > 0$, $a > 0$. Тогда

$$C(\lambda) = \int_0^\infty e^{-ax-2i\pi\lambda x} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dx. \qquad \text{(V, 1; 39)}$$

Сделаем замену переменного

$$Z = (a + 2i\pi\lambda)\, x. \qquad \text{(V, 1; 40)}$$

Когда x пробегает положительную часть вещественной прямой $(0, +\infty)$, переменное Z пробегает луч $(0, (a+2i\pi\lambda)\infty)$ в комплексной плоскости.

---

[1]) Преобразование Фурье функции $e^{-\pi x^2}$ можно вычислить элементарно, не прибегая к методам теории функций комплексного переменного. Равенство $C(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2 - 2i\pi\lambda x}\, dx$ можно продифференцировать по λ под знаком интеграла, поскольку после дифференцирования получается интеграл, равномерно сходящийся, когда λ лежит на любом конечном отрезке:

$$C'(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2 - 2i\pi\lambda x}(-2i\pi x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\lambda x} i\, de^{-\pi x^2} = i\left[e^{-2i\pi\lambda x} e^{-\pi x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} -$$

$$- i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\, de^{-2i\pi\lambda x} = -i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2i\pi\lambda x}(-2i\pi\lambda)\, dx =$$

$$= -2\pi\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2 - 2i\pi\lambda x}\, dx = -2\pi\lambda C(\lambda).$$

Законность интегрирования по частям и обращение в нуль проинтегрированного члена очевидны. Из уравнения $C'(\lambda) = -2\pi\lambda C(\lambda)$ получаем $C(\lambda) = C(0)\, e^{-\pi\lambda^2}$, где $C(0)$ — интеграл Гаусса, равный 1. — *Прим. перев.*

Имеем

$$C(\lambda)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{(a+2i\pi\lambda)\infty} e^{-Z}\left(\frac{Z}{a+2i\pi\lambda}\right)^{\alpha-1}\frac{dZ}{a+2i\pi\lambda}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{a+2i\pi\lambda}\right)^{\alpha}\int_0^{(a+2i\pi\lambda)\infty} e^{-Z}Z^{\alpha-1}\,dZ. \quad (V, 1; 41)$$

Ветвь функции ζ^α при $\operatorname{Re}\zeta>0$ выбирается по непрерывности; ζ^α считается вещественной положительной при вещественном положительном ζ.

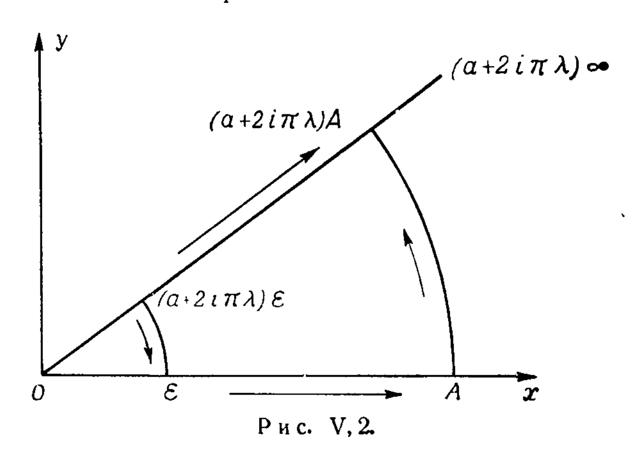


Рис. V, 2.

Здесь функция $e^{-Z}Z^{\alpha-1}$ снова голоморфна при $\operatorname{Re}Z>0$. Беря контур, указанный на рисунке, мы можем написать

$$\int_0^{(a+2i\pi\lambda)\infty} e^{-Z}Z^{\alpha-1}\,dZ=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\A\to\infty}}\int_{(a+2i\pi\lambda)\varepsilon}^{(a+2i\pi\lambda)A}=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\A\to\infty}}\left[\int_{(a+2i\pi\lambda)\varepsilon}^{\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{A}+\int_{A}^{(a+2i\pi\lambda)A}\right]. \quad (V, 1; 42)$$

Первый и третий интегралы здесь также стремятся к 0 при $\varepsilon\to0$ и $A\to\infty$ (докажите это строго в качестве упражнения).

Интеграл $\int_\varepsilon^A$ стремится к интегралу $\int_0^\infty$. Имеем

$$\int_0^{(a+2i\pi\lambda)\infty} e^{-Z}Z^{\alpha-1}\,dZ=\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx=\Gamma(\alpha), \quad (V, 1; 43)$$

так что

$$\mathcal{F}\left[Y(x)\,e^{-ax}\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right]=\left(\frac{1}{a+2i\pi\lambda}\right)^{\alpha}. \qquad (\text{V}, 1, 44)$$

Определение ветви функции, стоящей справа, выбирается по непрерывности; при $\lambda=0$ величина $1/a^{\alpha}$ считается вещественной положительной. Впрочем, при $\lambda=0$ значение

$$C(0)=\frac{1}{a^{\alpha}} \qquad (\text{V}, 1; 45)$$

получается сразу же, ибо замена переменного происходит в вещественной области; а, как известно, $C(\lambda)$ должна быть непрерывной, поскольку $f(x)$ — суммируема[1]).

Пользуясь формулой (V, 1; 28), аналогично имеем

$$\mathcal{F}\left[Y(-x)\,e^{-a|x|}\frac{|x|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right]=\left(\frac{1}{a-2i\pi\lambda}\right)^{\alpha} \qquad (\text{V}, 1; 46)$$

(ибо $-x$ равно $|x|$ при $x<0$).

Отсюда, складывая, получим

$$\mathcal{F}\left[e^{-a|x|}\frac{|x|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right]=\left(\frac{1}{a+2i\pi\lambda}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1}{a-2i\pi\lambda}\right)^{\alpha}. \qquad (\text{V}, 1; 47)$$

В частности, при $\alpha=1$

$$\mathcal{F}\left[e^{-a|x|}\right]=\frac{2a}{a^2+4\pi^2\lambda^2}. \qquad (\text{V}, 1; 48)$$

---

[1]) Интеграл $C(\lambda)=C(\lambda,\alpha)=\int\limits_0^{\infty}e^{-ax-2i\pi x\lambda}\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,dx$ также можно вычислить, не прибегая к методам теории функций комплексного переменного.

Рассмотрим произведение

$$C(\lambda,\alpha)\,C(\lambda,\beta)=\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}e^{-ax-2i\pi\lambda x}\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,e^{-ay-2i\pi\lambda y}\frac{y^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\,dx\,dy.$$

Запись в виде двойного интеграла законна в силу теоремы Фубини, ибо подинтегральная функция как функция двух переменных x и y суммируема. Делая замену переменных $x=u^2$, $y=v^2$ и переходя затем к полярным координатам $u=r\cos\varphi$, $v=r\sin\varphi$, получим формулу $C(\lambda,\alpha)\,C(\lambda,\beta)=C(\lambda,\alpha+\beta)$. Из этой формулы в силу непрерывности $C(\lambda,\alpha)$ как функции α вытекает, что $C(\lambda,\alpha)=[C(\lambda,1)]^{\alpha}$; $C(\lambda,1)$ вычисляется непосредственно. Этот же результат можно получить с помощью сверток (см. далее стр. 228). — *Прим. перев.*

§ 2. Преобразование Фурье распределений от одного переменного

1. Определение. Попытаемся найти выражение для $\mathcal{F}f$, рассматривая f и $\mathcal{F}f$ не как функции, а как распределения:

$$\langle \mathcal{F}f, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\,d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\lambda x} f(x)\,dx = \int\int e^{-2i\pi\lambda x} f(x)\,\varphi(\lambda)\,dx\,d\lambda. \quad \text{(V, 2; 1)}$$

Эта формула справедлива, поскольку двойной интеграл имеет смысл: в самом деле, $|e^{-2i\pi\lambda x} f(x)\varphi(\lambda)| = |f(x)|\,|\varphi(\lambda)|$ — функция, которая суммируема как произведение суммируемой функции от x на суммируемую функцию от λ. Поэтому можно написать

$$\langle \mathcal{F}f, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi x\lambda} \varphi(\lambda)\,d\lambda = \langle f, \mathcal{F}\varphi\rangle. \quad \text{(V, 2; 2)}$$

Эта формула справедлива, даже когда $\varphi \notin \mathcal{D}$, лишь бы $\varphi \in L^1$. В этом случае преобразование $\mathcal{F}f = C(\lambda)$ ограничено, так же как и $\mathcal{F}\varphi = \gamma(x)$. Обе величины

$$\langle \mathcal{F}f, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda)\,\varphi(\lambda)\,d\lambda \quad \text{(V, 2; 3)}$$

и

$$\langle f, \mathcal{F}\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\gamma(x)\,dx \quad \text{(V, 2; 4)}$$

имеют при этом смысл и равны.

Соотношение (V, 2; 2) наводит на мысль определить преобразование Фурье $\mathcal{F}U = V_\lambda$ распределения U_x формулой

$$\langle \mathcal{F}U, \varphi\rangle = \langle U, \mathcal{F}\varphi\rangle \text{ для любой } \varphi \in (\mathcal{D})_\lambda. \quad \text{(V, 2; 5)}$$

Однако эта формула не имеет смысла при произвольном $U \in (\mathcal{D}')_x$. В самом деле, если φ принадлежит $(\mathcal{D})_\lambda$, то преобразование $\mathcal{F}\varphi$ вовсе не обязано принадлежать $(\mathcal{D})_x$ [мы увидим даже (предложение 5), что $\mathcal{F}\varphi$ принадлежит $(\mathcal{D})_x$, только когда $\varphi \equiv 0$]. Так что правая часть равенства (V, 2; 5) не имеет смысла. Преобразование Фурье произвольного распределения не существует. Мы будем рассматривать специальные распределения.

2. Умеренные распределения. Пространство $\mathscr{S}'$. По самому определению пространства $\mathscr{S}$ и его топологии мы видим, что пространство $\mathscr{D}$ содержится в $\mathscr{S}$ и что если функции φ_j сходятся к 0 в смысле $\mathscr{D}$, то они a fortiori сходятся к 0 в пространстве $\mathscr{S}$.

Умеренным распределением называют распределение T (т. е. линейную непрерывную форму на $\mathscr{D}$), которое продолжимо до линейной непрерывной формы на $\mathscr{S}$.

Примеры.

1) Суммируемая функция f является умеренной. В самом деле, можно положить

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx, \tag{V, 2; 6}$$

причем интеграл будет иметь смысл, коль скоро φ ограничена; но ведь функция φ, принадлежащая $\mathscr{S}$, всегда ограничена[1]).

2) Ограниченная функция f является умеренной. Действительно, в этом случае формула (V, 2; 6) будет иметь смысл, коль скоро $\varphi \in L^1$; но ведь функция φ, принадлежащая $\mathscr{S}$, всегда суммируема.

Вообще любая локально суммируемая *медленно возрастающая* функция $f(x)$ является умеренной. „Медленно возрастающая“ означает, что

$$|f(x)| \leqslant A|x|^k \quad \text{при} \quad |x| \to \infty. \tag{V, 2; 7}$$

В самом деле, функция $\varphi \in \mathscr{S}$ удовлетворяет при $|x| \to \infty$ неравенству

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{B}{|x|^{k+2}}, \tag{V, 2; 8}$$

а значит, $|f(x)\varphi(x)| \leqslant AB/|x|^2$ и $f(x)\varphi(x)$ суммируема.

Слово „*умеренное*“ намекает именно на медленное возрастание в бесконечности.

3) Распределение T с ограниченным носителем является умеренным. В самом деле, форма $\langle T, \varphi\rangle$ имеет смысл для всех бесконечно дифференцируемых функций φ безотносительно к их убыванию на бесконечности.

4) Если распределение T умеренное, то и все его производные также умеренны. В самом деле, распределение T' задается формулой

$$\langle T', \varphi\rangle = -\langle T, \varphi'\rangle. \tag{V, 2; 9}$$

---

[1]) Легко проверить также, что формула (V, 2; 6) задает в этом случае *непрерывную* на $\mathscr{S}$ линейную форму. Это замечание относится и к дальнейшим примерам. — *Прим. перев.*

Но ведь если φ принадлежит $\mathcal{S}$, то и φ' также принадлежит $\mathcal{S}$, и, значит, при умеренном T форма $\langle T, \varphi'\rangle$ имеет смысл, когда $\varphi \in \mathcal{S}$. Это показывает, что $\langle T', \varphi\rangle$ имеет смысл при $\varphi \in \mathcal{S}$, и, значит, T' — умеренное.

5) Пусть распределение T — умеренное, и пусть α — полином от x, тогда распределение αT будет умеренным.

В самом деле, распределение αT задается формулой

$$\langle \alpha T, \varphi\rangle = \langle T, \alpha\varphi\rangle. \tag{V, 2; 10}$$

Если φ принадлежит $\mathcal{S}$ и α — полином, то $\alpha\varphi$ также принадлежит $\mathcal{S}$, и поскольку распределение T — умеренное, форма $\langle T, \alpha\varphi\rangle$ имеет смысл, но тогда и форма $\langle \alpha T, \varphi\rangle$ имеет смысл, а значит, распределение αT является умеренным.

6) Легко показать, что функция $f(x)$, подобная e^x, которая не является медленно возрастающей при $x \to +\infty$, *не является и умеренной.*

Пространство умеренных распределений, двойственное пространству $\mathcal{S}$, будет обозначаться $\mathcal{S}'$.

3. Преобразование Фурье умеренных распределений. Пусть $U_x \in (\mathcal{S}')_x$. При $\varphi \in (\mathcal{S})_\lambda$ правая часть равенства (V, 2; 5) имеет смысл, поскольку $\mathcal{F}\varphi = \gamma(x)$ принадлежит $(\mathcal{S})_x$ (предложение 3). Кроме того, если функции $\varphi_j(\lambda)$ сходятся к 0 в смысле $(\mathcal{S})_\lambda$, то, согласно тому же самому предложению 3, функции $\mathcal{F}\varphi_j = \gamma_j(x)$ сходятся к 0 в смысле $(\mathcal{S})_x$ и, следовательно, числа $\langle U_x, \mathcal{F}\varphi_j\rangle$ стремятся к нулю. Таким образом, правая часть равенства (V, 2; 5) задает некоторую линейную форму, непрерывную на $(\mathcal{S})_\lambda$, т. е. задает некоторое умеренное распределение V_λ, которое, по определению, мы и примем за $\mathcal{F}U$.

Преобразование $\overline{\mathcal{F}}$ обладает, конечно, аналогичными свойствами. Итак,

Предложение 4. *Пусть U_x — умеренное распределение, тогда преобразования $\mathcal{F}U$ и $\overline{\mathcal{F}}U$ можно определить формулами*

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}U, \varphi\rangle &= \langle U, \mathcal{F}\varphi\rangle,\\ \langle \overline{\mathcal{F}}U, \varphi\rangle &= \langle U, \overline{\mathcal{F}}\varphi\rangle\end{aligned} \tag{V, 2; 11}$$

при любой функции

$$\varphi(\lambda) \in (\mathcal{S})_\lambda.$$

Распределения $\mathcal{F}U$ и $\overline{\mathcal{F}}U$ являются умеренными.

Образы Фурье распределений с ограниченным носителем

Пусть $U_x \in \mathscr{E}'$ (и, значит, $U_x \in \mathscr{S}'$). Тогда, при фиксированном λ, можно вычислить величину

$$V(\lambda) = \langle U_x, e^{-2i\pi\lambda x}\rangle. \qquad \text{(V, 2; 12)}$$

Кроме того, мы видим, что $V(\lambda)$ является бесконечно дифференцируемой функцией от λ, поскольку функция $e^{-2i\pi\lambda x}$ бесконечно дифференцируема по λ и по x (см. гл. III, предложение 1). И, кроме того, даже при *комплексном* фиксированном λ функция $e^{-2i\pi\lambda x}$ принадлежит $(\mathscr{E})_x$, а значит, $V(\lambda)$ существует при комплексных λ. Поскольку функция $V(\lambda)$ бесконечно дифференцируема, она является целой голоморфной функцией. Мы собираемся показать, что эта функция $V(\lambda)$, рассматриваемая при вещественных λ, представляет собой преобразование Фурье распределения U_x; формула (V, 2; 12) обобщает определение (V, 1; 7) путем замены $f(x)$ на распределение U_x с ограниченным носителем. В самом деле, при $\varphi(\lambda) \in (\mathscr{S})_\lambda$ имеем

$$\langle \mathscr{F}U, \varphi\rangle = \langle U, \mathscr{F}\varphi\rangle =$$

$$= \left\langle U_x, \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\lambda x}\varphi(\lambda)\,d\lambda\right\rangle = \quad \text{по теореме Фубини}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \langle U_x\varphi(\lambda), e^{-2i\pi\lambda x}\rangle\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\langle U_x, e^{-2i\pi\lambda x}\rangle\,d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)V(\lambda)\,d\lambda = \langle V, \varphi\rangle, \qquad \text{(V, 2; 13)}$$

откуда мы заключаем, что $\mathscr{F}U = V$.

Выразим это теоремой.

Предложение 5. *Если U_x — распределение с ограниченным носителем, то его образ Фурье представляет собой некоторую функцию $V(\lambda)$. Эта функция продолжима на комплексные значения λ как целая голоморфная функция.*

Она дается формулой

$$V(\lambda) = \langle U_x, e^{-2i\pi\lambda x}\rangle. \qquad \text{(V, 2; 12)}$$

Ниже мы столкнемся с иными примерами, когда преобразование Фурье некоторого распределения или даже некоторой функции является распределением [см. формулу (V, 2; 26)].

Как частный случай предложения 5, мы видим, что если f — функция с ограниченным носителем, то ее образ Фурье, даваемый формулой (V, 1; 7), является голоморфной функцией λ. Следовательно, этот образ не может иметь ограниченный носитель, не будучи тождественным нулем. Мы увидим в дальнейшем, что $\mathcal{F}\varphi$ будет тождественным нулем, только если сама φ — тождественный нуль; поэтому если функция φ принадлежит $(\mathcal{D})_x$ и не равна тождественно нулю, то ее образ Фурье никогда не принадлежит $(\mathcal{D})_\lambda$.

Образы Фурье распределений с точечным носителем

Формула (V, 2; 12) дает

$$\mathcal{F}\delta = \langle \delta_x, e^{-2i\pi\lambda x}\rangle = 1. \qquad (V, 2; 14)$$

Образом Фурье распределения δ является постоянная функция 1.

$$\mathcal{F}\delta' = \langle \delta'_x, e^{-2i\pi\lambda x}\rangle = 2i\pi\lambda, \qquad (V, 2; 15)$$

$$\mathcal{F}\delta^{(m)} = \langle \delta_x^{(m)}, e^{-2i\pi\lambda x}\rangle = (2i\pi\lambda)^m. \qquad (V, 2; 16)$$

Прямое применение формулы (V, 2; 11) дало бы тот же самый результат:

$$\langle \mathcal{F}\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, \mathcal{F}\varphi\rangle = \left\langle \delta_x, \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\lambda x}\varphi(\lambda)\,d\lambda\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\,d\lambda = \langle 1, \varphi\rangle, \qquad (V, 2; 17)$$

откуда $\mathcal{F}\delta = 1$.

Наконец,

$$\mathcal{F}[\delta(x-a)] = \langle \delta_{x-a}, e^{-2i\pi\lambda x}\rangle = e^{-2i\pi\lambda a}. \qquad (V, 2; 18)$$

Доказательство формулы $\mathcal{F}1 = \delta$

Заметим сначала, что формулы (V, 1; 25) и (V, 1; 26) (без оценок) распространяются на умеренные распределения.

Если $\mathcal{F}U_x = V_\lambda$, то

$$\mathcal{F}\left[U_x^{(m)}\right] = (2i\pi\lambda)^m V_\lambda, \qquad (V, 2; 19)$$

$$\mathcal{F}\left[(-2i\pi x)^m U_x\right] = V_\lambda^{(m)}. \qquad (V, 2; 20)$$

Докажем, например, первую из этих формул

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}U_x^{(m)}, \varphi(\lambda)\rangle &= \langle U^{(m)}, \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle U^{(m)}, \gamma\rangle = \\ &= \langle U, (-1)^m\gamma^{(m)}\rangle = \quad \text{в силу (V, 1; 26)} \\ &= \langle U, (-1)^m\mathcal{F}[(-2i\pi\lambda)^m\varphi(\lambda)]\rangle = \langle \mathcal{F}U, (2i\pi\lambda)^m\varphi(\lambda)\rangle = \\ &= \langle V_\lambda, (2i\pi\lambda)^m\varphi(\lambda)\rangle = \langle (2i\pi\lambda)^m V_\lambda, \varphi(\lambda)\rangle, \qquad (V, 2; 21)\end{aligned}$$

откуда $\mathcal{F}\left[U_x^{(m)}\right] = (2i\pi\lambda)^m V_\lambda$.

Вторая формула доказывается с использованием равенства (V, 1; 25).

Положим теперь в равенстве (V, 2; 19) $m = 1$ и $U = 1$ (это ограниченная и, значит, умеренная функция). Поскольку производная единицы равна нулю, будем иметь

$$0 = \mathcal{F}[0] = 2i\pi\lambda V_\lambda, \qquad (V, 2; 22)$$

или

$$\lambda V_\lambda = 0. \qquad (V, 2; 23)$$

Но мы видели (см. гл. II), что распределение V_λ, удовлетворяющее уравнению (V, 2; 23), обязательно пропорционально δ. Поэтому

$$\mathcal{F} 1 = C\delta. \qquad (V, 2; 24)$$

Воспользуемся теперь определением (V, 2; 11), подставив в него специальную функцию φ, наиболее простую функцию из $\mathcal{S}$, для которой мы знаем явно образ Фурье: если $\varphi(\lambda) = e^{-\pi\lambda^2}$, то $\mathcal{F}\varphi = e^{-\pi x^2}$ [формула (V, 1; 37)]. Имеем

$$\langle \mathcal{F} 1, e^{-\pi\lambda^2} \rangle = \langle 1, \mathcal{F} e^{-\pi\lambda^2} \rangle = \langle 1, e^{-\pi x^2} \rangle = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1 \text{ (интеграл Гаусса).} \qquad (V, 2; 25)$$

Но ведь $\langle \delta, e^{-\pi x^2} \rangle = 1$. Следовательно, $C = 1$ и

$$\mathcal{F} 1 = \delta. \qquad (V, 2; 26)$$

Поскольку эта формула носит вещественный характер, т. е. инвариантна при замене i на $-i$, имеем также

$$\overline{\mathcal{F}} 1 = \delta. \qquad (V, 2; 27)$$

Двойственная формула Фурье

С формулой (V, 1; 6) связана формула (V, 1; 5). Однако эта формула не обязательно имеет смысл в теории функций; в самом деле, если $f(x)$ принадлежит L^1, то $C(\lambda)$ ограничена, но не обязательно суммируема [пример: равенство (V, 1; 44) при $\alpha < 1$], так что (V, 1; 5) не имеет смысла.

Заметим к тому же, что формула, подобная (V, 1; 5) и дающая $f(x)$ при всех значениях x, была бы абсурдной, поскольку изменение значений f на множестве меры нуль не изменяет $C(\lambda)$.

Напротив, $C(\lambda)$ как ограниченная функция является умеренным распределением и, значит, имеет образ при отображении $\overline{\mathcal{F}}$; совпадает ли этот образ с $f(x)$? Да, действительно совпадает. Вообще мы скоро увидим, что если $\mathcal{F} U = V$, то $\overline{\mathcal{F}} V = U$ [частным случаем этого является равенство (V, 2; 27), если учесть (V, 2; 14)].

Предположим сначала, что $\varphi(x)$ — некоторая функция из $(\mathcal{S})_x$ и что $\mathcal{F}\varphi = \gamma(\lambda)$. Мы хотим показать, что $\overline{\mathcal{F}}\gamma = \varphi$. В точке a имеем

$$\overline{\mathcal{F}}[\gamma](a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\lambda a}\gamma(\lambda)\,d\lambda. \qquad (V, 2; 28)$$

Заметим теперь, что

$$e^{2i\pi\lambda a}\gamma(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\lambda(x-a)}\varphi(x)\,dx.$$

Заменой переменного получим

$$e^{2i\pi\lambda a}\gamma(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\lambda x}\varphi(x+a)\,dx = \mathcal{F}[\varphi(x+a)]. \qquad \mathbf{(V, 2; 29)}$$

Равенство (V, 2; 28) запишется теперь в виде

$$\overline{\mathcal{F}}[\gamma](a) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\varphi(x+a)]\,dx = \langle 1, \mathcal{F}[\varphi(x+a)]\rangle =$$

$$= \langle \mathcal{F}1, \varphi(x+a)\rangle = \qquad \text{в силу } \mathbf{(V, 2; 26)}$$

$$= \langle \delta, \varphi(x+a)\rangle = \varphi(a). \qquad (V, 2; 30)$$

Таким образом, мы доказали соотношение (V, 1; 5), когда $f = \varphi \in \mathcal{S}$. Следовательно, при $\varphi \in \mathcal{S}$ имеем

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi = \varphi \quad \text{и аналогично} \quad \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\varphi = \varphi. \qquad (V, 2; 31)$$

Такие же формулы сразу же получаются теперь и для $U \in \mathcal{S}'$:

$$\langle \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}U, \varphi\rangle = \langle \mathcal{F}U, \overline{\mathcal{F}}\varphi\rangle = \langle U, \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\varphi\rangle = \langle U, \varphi\rangle, \qquad (V, 2; 32)$$

следовательно,

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}U = U \quad \text{и аналогично} \quad \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}U = U. \qquad (V, 2; 33)$$

Итак,

Предложение 6. *Преобразования $\mathcal{F}$ и $\overline{\mathcal{F}}$ являются взаимно обратными на пространствах умеренных распределений:*

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}U = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}U = U. \qquad (V, 2; 33)$$

Следовательно, если $\mathcal{F}U = V$, то $\overline{\mathcal{F}}V = U$.

Вывод. *Равенство $\mathcal{F}U = 0$ может иметь место, только если $U = 0$.*

В самом деле, если $V = \mathcal{F}U = 0$, то $U = \overline{\mathcal{F}}V = \overline{\mathcal{F}}0 = 0$. Если U есть некоторая функция f, то это рассуждение, естественно, доказывает только то, что функция f равна нулю как распределение, т. е. что f равна нулю почти всюду.

Замечание. Пусть $f \in L^1$, и пусть известно, что функция $C(\lambda)$ не только ограничена, но и суммируема [пусть это известно, например, благодаря тому, что известен явный вид $C(\lambda)$]. Тогда преобразование $\overline{\mathcal{F}}C(\lambda)$ будет функцией, равной $\int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{2i\pi\lambda x} d\lambda$. Предложение 6 показывает тогда, что функции $f(x)$ и $\int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\lambda x} C(\lambda) d\lambda$ равны как распределения, то есть равны почти всюду. Поскольку вторая из них непрерывна, отсюда следует, что исходная функция $f(x)$ почти всюду совпадает с некоторой непрерывной функцией; если $f(x)$ непрерывна, то равенство (V, 1; 5) выполняется тождественно. Можно показать дополнительно, что если $f \in L^1$ и если в окрестности точки a функция f имеет ограниченное изменение, то

$$\frac{f(a+0)+f(a-0)}{2} = \lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} C(\lambda) e^{2\pi i\lambda a} d\lambda. \qquad (V, 2; 34)$$

Формула обращения позволяет обратить равенства (V, 2; 14), (V, 2; 16) и (V, 2; 18):

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{F}1 &= \delta, \\ \mathcal{F}\left[(-2i\pi x)^m\right] &= \delta_\lambda^{(m)}, \\ \mathcal{F}\left[e^{2i\pi a x}\right] &= \delta_{\lambda-a}. \end{aligned}\right\} \qquad (V, 2; 35)$$

Равенство (V, 2; 34), примененное к примеру (V, 1; 31) при $a = 0$, дает соотношение

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi\lambda A}{\pi\lambda} d\lambda \quad \text{или} \quad \int_{0}^{\infty} \frac{\sin k\lambda}{\lambda} d\lambda = \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad k > 0. \qquad (V, 2; 36)$$

Упражнение. Используя теорию вычетов, проверить формулу двойственности для примера (V, 1; 48):

$$\mathcal{F}\left[\frac{2a}{a^2+4\pi^2x^2}\right] = e^{-a|\lambda|}. \qquad (V, 2; 37)$$

Быстрое интуитивное доказательство формулы обращения

Из равенства $\mathcal{F}1=\delta$ обычно получают следующее интуитивное доказательство формулы обращения. Распределение U, как и функцию, обозначают $U(x)$, а для его образа Фурье V пишут

$$V(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\lambda x}U(x)\,dx. \qquad (V, 2; 38)$$

Тогда преобразование $\overline{\mathcal{F}}V$ запишется в виде

$$\overline{\mathcal{F}}V=\int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\lambda x}V(\lambda)\,d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\lambda x}\,d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} U(\xi)\,e^{-2i\pi\lambda\xi}\,d\xi. \qquad (V, 2; 39)$$

Затем обращают порядок интегрирований, хотя двойной интеграл никогда не является суммируемым [ибо $|e^{2i\pi\lambda x}U(\xi)\,e^{-2i\pi\lambda\xi}|=|U(\xi)|$, а эта функция, даже если U — суммируемая функция от ξ, никогда не суммируема по ξ, λ:

$$\int\int|U(\xi)|\,d\xi\,d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}|U(\xi)|\,d\xi=+\infty\Big].$$

После обращения порядка получают интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}U(\xi)\,d\xi\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2i\pi\lambda(\xi-x)}\,d\lambda. \qquad (V, 2; 40)$$

Равенство $\mathcal{F}1=\delta$ (некорректно) записывают в виде интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2i\pi\lambda X}\,d\lambda=\delta(X). \qquad (V, 2; 41)$$

Тогда (V, 2; 40) записывается в виде

$$\overline{\mathcal{F}}V=\int_{-\infty}^{\infty}U(\xi)\,\delta(\xi-x)\,d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}U(\xi)\,\delta(x-\xi)\,d\xi=U(x) \qquad (V, 2; 42)$$

[см. формулу (III, 2; 34)].

Можно попытаться обосновать подобный формализм, однако обоснование мало отличается от строгого доказательства, которое мы привели. Тем не менее приведенный выше формализм является более прямым.

4. Формула Парсеваля — Планшереля. Преобразование Фурье в L^2. Пусть $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция с ограниченным носителем. В силу оценки (V, 1; 18) (с $m=2$) модуль $|C(\lambda)|$ мажорируется на бесконечности функцией $1/\lambda^2$ и, значит, $C(\lambda)$ суммируема. Поэтому, используя формулу обращения, можно написать

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{f(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} \overline{C(\lambda)}\,e^{-2i\pi\lambda x}\,d\lambda =$$
$$= \int\int f(x)\overline{C(\lambda)}\,e^{-2i\pi\lambda x}\,dx\,d\lambda, \qquad (V, 2; 43)$$

ибо этот двойной интеграл имеет смысл в силу условий, наложенных на функцию f (функция f суммируема по x, функция C — по λ, а, значит, их произведение суммируемо по x, λ). Можно, следовательно, изменить порядок интегрирований:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{C}(\lambda)\,d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-2i\pi\lambda x}\,dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{C}(\lambda)\,C(\lambda)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} |C(\lambda)|^2\,d\lambda. \qquad (V, 2; 44)$$

Иначе говоря

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |C(\lambda)|^2\,d\lambda, \\ \|f\|_{L^2} &= \|C\|_{L^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (V, 2; 45)$$

Пусть теперь f — произвольная функция из L^2. Аппроксимируем ее (в L^2, т. е. в смысле среднего квадратичного) последовательностью дважды непрерывно дифференцируемых функций f_n с ограниченными носителями. Тогда отсюда можно вывести, что образ Фурье функции f [образ в смысле теории распределений, ибо функция из L^2 является также и умеренной, но не обязательно суммируемой, как показывает пример

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

и, значит, формула (V, 1; 7) может оказаться лишенной смысла] является некоторой функцией $C(\lambda)$ с суммируемым квадратом [функция $C(\lambda)$ определяется как распределение, т. е. определяется только почти всюду]. При

этом для функций $f(x)$ и $C(\lambda)$ выполняется равенство (V, 2; 45). Далее, аналогичную формулу можно написать, заменив $f(x)$ на $g(x)$, а $C(\lambda)$ на $D(\lambda)$ — образ Фурье функции g; если f и g принадлежат L^2, то, по неравенству Шварца, функция fg суммируема. Из равенств (V, 2; 45) для функций f и g получается равенство

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g}(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda)\,\overline{D}(\lambda)\,d\lambda, \\ \text{или}\qquad (f,\ g)_{L^2} &= (C,\ D)_{L^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (V, 2; 46)$$

Резюмируем сказанное в виде теоремы. Эта теорема — двойник аналогичного предложения из теории рядов Фурье (гл. IV, предложение 6).

Предложение 7. (Планшерель — Парсеваль.) *Преобразования* $\mathscr{F}$ *и* $\overline{\mathscr{F}}$ *являются взаимно обратными изометриями между* L^2_x *и* L^2_λ. *Если* f *и* g *принадлежат* L^2_x, *то их образы Фурье (в смысле теории распределений) принадлежат* L^2_λ, *при этом выполняются равенства* (V, 2; 45) *и* (V, 2; 46).

5. Формула суммирования Пуассона. Пусть U_x — распределение $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{x-n}$, образованное массами $+1$ во всех точках с целочисленными абсциссами. Найдем его образ Фурье. Имеем

$$\mathscr{F}\,[\delta_{x-n}] = e^{-2i\pi n\lambda}. \qquad (V, 2; 47)$$

Допуская, что порядок символов $\mathscr{F}$ и $\sum$ можно изменить (это легко обосновывается), будем иметь

$$\mathscr{F} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{x-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathscr{F}\delta_{x-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi n\lambda}. \qquad (V, 2; 48)$$

Но в гл. IV, в теории рядов Фурье, мы видели, что сумма этого последнего ряда равна $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{\lambda-n}$. Следовательно,

$$\mathscr{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{x-n}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{\lambda-n}. \qquad (V, 2; 49)$$

Мы имеем здесь распределение, которое, подобно $e^{-\pi x^2}$, равно своему преобразованию Фурье (с точностью до обозначения переменного x или λ).

Применяя к этой паре распределений равенство (V, 2; 11), которое определяет преобразование Фурье, мы видим, что выполняется соотношение

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\gamma(n)=\left\langle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta_{x-n},\ \gamma\right\rangle=\left\langle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta_{\lambda-n},\ \varphi\right\rangle=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(n), \qquad (V, 2; 50)$$

где функция $\varphi(\lambda)\in\mathcal{S}_\lambda$, а $\gamma(x)$ — ее преобразование Фурье.

Таким образом, мы имеем формулу суммирования Пуассона

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\gamma(n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(n). \qquad (V, 2; 51)$$

Применяя эту формулу к $\gamma(x)=e^{-tx^2}$ [см. равенство (V, 1; 38)], получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-tn^2}=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\pi^2}{t}n^2}\right]\sqrt{\frac{\pi}{t}}. \qquad (V, 2; 52)$$

Эта замечательная формула (функциональное уравнение для θ-функций) играет важную роль в теории эллиптических функций и в теории теплопроводности.

6. Преобразование Фурье, умножение и свертка. Пусть S и T — два распределения с ограниченными носителями. Их образы Фурье [$C(\lambda)$ и $D(\lambda)$] являются функциями, которые даются формулой (V, 2; 12). Свертка $S*T$ также имеет ограниченный носитель, а ее образ Фурье дается той же формулой

$$\mathcal{F}[S*T](\lambda)=\langle S*T,\ e^{-2i\pi\lambda x}\rangle=\langle S_\xi\otimes T_{\eta},\ e^{-2i\pi\lambda(\xi+\eta)}\rangle=$$
$$=\langle S_\xi\otimes T_{\eta},\ e^{-2i\pi\lambda\xi}e^{-2i\pi\lambda\eta}\rangle=\langle S_\xi,\ e^{-2i\pi\lambda\xi}\rangle\langle T_\eta,\ e^{-2i\pi\lambda\eta}\rangle=C(\lambda)D(\lambda). \qquad (V, 2; 53)$$

Мы примем без доказательства, что эта формула остается справедливой, если S — произвольное умеренное распределение, а T — распределение с ограниченным носителем. Точнее: при этих условиях свертка $S*T$, конечно, имеет смысл, мы же примем без доказательства, что она также является умеренным распределением и что выполняется равенство

$$\mathcal{F}(S*T)=C_\lambda D(\lambda). \qquad (V, 2; 54)$$

При этом C_λ является распределением, а $D(\lambda)$ — бесконечно дифференцируемой функцией (предложение 5), и, значит, их произведение имеет смысл. Эта формула справедлива также во многих других случаях [1]). Образом Фурье свертки $S*T$ служит произведение образов Фурье распределений S и T.

[1]) Например, если f и g принадлежат L^1, то $f*g$ также принадлежит L^1 и $\mathcal{F}(f*g)=\mathcal{F}f\cdot\mathcal{F}g$.

Такая же формула, очевидно, справедлива и для преобразования $\overline{\mathcal{F}}$. Теперь, используя формулу обращения, имеем

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{F}[S*T] &= \mathcal{F}S\cdot\mathcal{F}T, \\ \overline{\mathcal{F}}[S*T] &= \overline{\mathcal{F}}S\cdot\overline{\mathcal{F}}T, \\ \mathcal{F}[S\cdot T] &= \mathcal{F}S*\mathcal{F}T, \\ \overline{\mathcal{F}}[S\cdot T] &= \overline{\mathcal{F}}S*\overline{\mathcal{F}}T. \end{aligned}\right\} \qquad (V, 2; 55)$$

Итак,

Предложение 8. *Преобразование Фурье превращает свертку в умножение и умножение в свертку по формулам* (V, 2; 55) (*если выполнены условия применимости этих формул*).

Это есть важнейшее свойство преобразования Фурье, как и в случае рядов Фурье (гл. IV), оно служит основой для использования преобразований Фурье. Преобразования Фурье широко используются в теории интегральных уравнений, в теории дифференциальных уравнений с частными производными (уравнение Лапласа, уравнение теплопроводности, волновое уравнение, уравнения квантовой механики) и в теории вероятностей.

Примеры.

1) Вернемся к примеру (V, 1; 44). Справедливо очевидное равенство

$$\left(\frac{1}{a+2i\pi\lambda}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{a+2i\pi\lambda}\right)^{\beta}=\left(\frac{1}{a+2i\pi\lambda}\right)^{\alpha+\beta}. \qquad (V, 2; 56)$$

Из него получается формула

$$Y(x)\,e^{-ax}\,\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * Y(x)\,e^{-ax}\,\frac{x^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} = Y(x)\,e^{-ax}\,\frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \qquad (V, 2; 57)$$

т. е. формула (III, 2; 11).

Мы видели, что эта формула в действительности справедлива при произвольном комплексном a, тогда как, например, при $a<0$ она не может быть доказана посредством преобразования Фурье, ибо функция $Y(x)\,e^{|a|x}\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ не является умеренной и не имеет образа Фурье. Заметим, что два распределения в левой части формулы (V, 2; 57) являются суммируемыми функциями, но с неограниченными носителями.

2) Рассмотрим теперь пример (V, 1; 38):

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right]=e^{-2\pi^2\sigma^2\lambda^2} \quad (\sigma>0). \qquad (V, 2; 58)$$

Но ведь очевидно, что

$$e^{-2\pi^2\sigma^2\lambda^2} \cdot e^{-2\pi^2\tau^2\lambda^2} = e^{-2\pi^2(\sigma^2+\tau^2)\lambda^2}, \qquad (V, 2; 59)$$

откуда

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} * \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\tau^2}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2(\sigma^2+\tau^2)}}, \qquad (V, 2; 60)$$

а это и есть формула (III, 2; 15).

3) Равенство (V, 1; 48) в комбинации с равенством (V, 1; 27) дает формулу

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi}\frac{a}{x^2+a^2}\right] = e^{-a|2\pi\lambda|}, \qquad a > 0. \qquad (V, 2; 61)$$

Но ведь очевидно, что

$$e^{-a|2\pi\lambda|} \cdot e^{-b|2\pi\lambda|} = e^{-(a+b)|2\pi\lambda|}. \qquad (V, 2; 62)$$

Отсюда мы выводим соотношение

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{a}{x^2+a^2} * \frac{1}{\pi}\cdot\frac{b}{x^2+b^2} = \frac{1}{\pi}\frac{a+b}{x^2+(a+b)^2}, \qquad (V, 2; 63)$$

которое совпадает с формулой (III, 1; 23).

4) Тот факт, что δ является единицей для свертки и что 1 является единицей для умножения, связан с соотношением $\mathcal{F}\delta = 1$.

Точно так же формулы (V, 2; 19) и (V, 2; 20) суть не что иное, как простые следствия предложения 8 в комбинации с формулами (V, 2; 16) и (V, 2; 35). Приложения к уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами возникают потому, что это — уравнения в свертках.

Например, пусть надо найти элементарное решение для дифференциального оператора $\frac{d^2}{dx^2} - a^2$:

$$E'' - a^2 E = \delta. \qquad (V, 2; 64)$$

Предположим, что E — умеренное; тогда оно имеет образ Фурье C. Преобразуя по Фурье уравнение (V, 2; 64), получим

$$(-4\pi^2\lambda^2 - a^2)\, C_\lambda = 1 \qquad (V, 2; 65)$$

или

$$C(\lambda) = \frac{-1}{a^2+4\pi^2\lambda^2}. \qquad (V, 2; 66)$$

Таким образом, мы находим решение

$$E_x = \overline{\mathcal{F}}\left[\frac{-1}{a^2+4\pi^2\lambda^2}\right] = -\frac{1}{2a} e^{-a|x|} \qquad (V, 2; 67)$$

[см. формулу (V, 1; 48)].

Действительно, прямая проверка дает

$$\left.\begin{aligned} E' &= \frac{\text{знак}\, x}{2}\, e^{-a|x|}, \\ E'' &= -\frac{a}{2} e^{-a|x|} + \delta \end{aligned}\right\} \qquad (V, 2; 68)$$

(благодаря разрыву в начале координат). Отсюда и вытекает равенство (V, 2; 64).

Найденное нами решение совершенно отлично от решения, найденного в главе III (свертка), которое принадлежало $\mathscr{D}'_+$ $\left[\text{решение, даваемое формулой (III, 2; 88) при } \omega = ia, \text{ превращается в } Y(x)\frac{\operatorname{sh} ax}{a}\right]$. Наше теперешнее решение не принадлежит $\mathscr{D}'_+$, решение же главы III не было умеренным. Впрочем, мы отыскали *единственное* умеренное решение. В самом деле, любое другое решение получается из E прибавлением некоторого решения $C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}$ однородного уравнения, а эта функция не является умеренной, если C_1 или C_2 отлично от нуля, ибо в любом из этих случаев она экспоненциально возрастает при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$. Уравнение, подобное уравнению

$$E'' + a^2 E = \delta, \qquad (V, 2; 69)$$

было бы гораздо сложнее решить этом способом и к тому же оно имело бы бесконечное число умеренных решений.

7. Другие записи преобразования Фурье. Преобразование Фурье часто записывают в иной форме. Для функции $f \in L^1$ положим

$$D(\lambda) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\lambda x} f(x)\, dx, \qquad (V, 2; 70)$$

ω вещественное $\neq 0$, $h > 0$. Тогда

$$D(\lambda) = \frac{1}{h} C\left(\frac{\omega}{2\pi}\lambda\right), \qquad (V, 2; 71)$$

где C — тот образ Фурье, который мы обычно вычисляли.

Формула двойственности записывается при этом в виде

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\mu x} C(\mu)\, d\mu = h \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\mu x} D\left(\frac{2\pi}{\omega}\mu\right) d\mu. \qquad (V, 2; 72)$$

Положим

$$\frac{2\pi}{\omega}\mu = \lambda.$$

Тогда

$$f(x)=\frac{h\,|\omega|}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\lambda x}D(\lambda)\,d\lambda, \qquad \text{(V, 2; 73)}$$

откуда мы получаем пару двойственных формул:

$$\left.\begin{aligned} D(\lambda)&=\frac{1}{h}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega\lambda x}f(x)\,dx,\\ f(x)&=\frac{1}{k}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{+i\omega\lambda x}D(\lambda)\,d\lambda,\end{aligned}\right\}\quad hk=\frac{2\pi}{|\omega|}. \qquad \text{(V, 2; 74)}$$

Обычно выбирают одну из следующих комбинаций постоянных:

$$\left.\begin{aligned} &\omega=\pm 2\pi, \quad h=k=1;\\ &\omega=\pm 1, \quad h=1,\ k=2\pi;\\ &\omega=\pm 1, \quad h=k=\sqrt{2\pi}.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(V, 2; 75)}$$

§ 3. Преобразование Фурье в случае многих переменных

Пусть $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in R^n$, $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\in R^n$. Преобразованием Фурье функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in L^1$ является функция $C(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, которая определяется равенством

$$C(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)=\int\int\limits_{R^n}\ldots\int e^{-2i\pi(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\ldots+\lambda_nx_n)}\times$$

$$\times f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n. \qquad \text{(V, 3; 1)}$$

Сокращенно это равенство записывают так:

$$C(\lambda)=\int\int\limits_{R^n}\ldots\int e^{-2i\pi(\lambda, x)}f(x)\,dx. \qquad \text{(V, 3; 2)}$$

Свойства этого преобразования аналогичны соответствующим свойствам в случае одного переменного.

В специальном случае, когда $f(x)=f_1(x_1)f_2(x_2)\ldots f_n(x_n)$, в силу того, что

$$e^{-2i\pi(\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_nx_n)}=\prod_{j=1}^{n}e^{-2i\pi\lambda_jx_j}, \qquad \text{(V, 3; 3)}$$

очевидно, имеем

$$C(\lambda) = \mathscr{F}[f_1 f_2 \dots f_n] = C_1(\lambda_1) C_2(\lambda_2) \dots C_n(\lambda_n) = \\ = \mathscr{F}[f_1] \mathscr{F}[f_2] \dots \mathscr{F}[f_n]. \qquad (V, 3; 4)$$

И в частности [см. формулу (V, 1; 37)],

$$\mathscr{F}[e^{-\pi r^2}] = e^{-\pi\rho^2}, \qquad (V, 3; 5)$$

где $r^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$, $\rho^2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2$.

Формула (V, 2; 14) сохраняется, а формулы (V, 2; 16) и (V, 2; 35) надо заменить формулами

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{F}\left[\frac{\partial\delta}{\partial x_k}\right] &= 2i\pi\lambda_k, \\ \mathscr{F}[-2i\pi x_k] &= \frac{\partial\delta}{\partial x_k} \end{aligned}\right\} \qquad (V, 3; 6)$$

(мы ограничились случаем $m = 1$). Формула (V, 1; 27) заменяется формулой

$$\mathscr{F}[f(kx_1, kx_2, \dots, kx_n)] = \frac{1}{|k|^n} C\left(\frac{\lambda_1}{k}, \frac{\lambda_2}{k}, \dots, \frac{\lambda_n}{k}\right). \qquad (V, 3; 7)$$

В аналоге формул (V, 2; 74) имеем

$$hk = \left(\frac{2\pi}{|\omega|}\right)^n. \qquad (V, 3; 8)$$

Более подробно мы изучим случай, когда f является функцией только от $r = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Phi(r). \qquad (V, 3; 9)$$

Покажем, что в этом случае $C(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ также является функцией только от $\rho = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2}$. Для этого достаточно показать, что $C(\lambda)$ инвариантна при вращениях вокруг начала координат. Пусть S — такое вращение; обозначим через $S\lambda$ точку μ, которая получается из λ при вращении S. Имеем

$$C(\mu) = C(S\lambda) = \int\int_{R^n} \dots \int e^{-2i\pi (S\lambda, x)} f(x)\, dx. \qquad (V, 3; 10)$$

Но скалярное произведение не меняется при вращении S^{-1}, значит $\langle S\lambda, x\rangle = \langle S^{-1}S\lambda, S^{-1}x\rangle = \langle \lambda, S^{-1}x\rangle$. Тогда

$$C(S\lambda) = \int\int_{R^n}\ldots\int e^{-2i\pi\langle\lambda, S^{-1}x\rangle} f(x)\,dx. \qquad \text{(V, 3; 11)}$$

Сделаем замену переменных $S^{-1}x = \xi$, $x = S\xi$; якобиан вращения всегда равен 1 (сохранение объема). После замены переменных

$$C(S\lambda) = \int\int_{R^n}\ldots\int e^{-2i\pi\langle\lambda, \xi\rangle} f(S\xi)\,d\xi. \qquad \text{(V, 3; 12)}$$

Но функция f инвариантна при вращениях, $f(S\xi) = f(\xi)$, так что $C(S\lambda) = C(\lambda)$, и C инвариантна при вращениях. Можно положить $C(\lambda) = \Gamma(\rho)$ [1]). Остается вычислить $\Gamma(\rho)$. Достаточно положить $\lambda_1 = \rho$, $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Тогда получим

$$\Gamma(\rho) = \int\int_{R^n}\ldots\int e^{-2i\pi x_1\rho}\Phi(r)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n. \qquad \text{(V, 3; 13)}$$

Воспользуемся предложением гл. I, касающимся вычисления кратных интегралов с помощью интегралов по сферам:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma(\rho) &= \int_0^\infty I(r)\,dr, \\ I(r) &= \int \Phi(r)\,e^{-2i\pi x_1\rho}\,dS, \\ \sum_{j=1}^n x_j^2 &= r^2. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(V, 3; 14)}$$

Этот интеграл по сфере радиуса r вычисляется разбиением сферы на зоны. Обозначим через θ угол радиуса-вектора точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с осью Ox_1. Множество точек сферы, для которых этот угол заключен между θ и $\theta + d\theta$, является зоной; ее площадь (n — 1-мерная) равна произведению $r\,d\theta$ на площадь (n — 2-мерную) сечения (радиуса $r\sin\theta$) сферы плоскостью $x_1 = r\cos\theta$.

Площадь этого сечения равна $\dfrac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}(r\sin\theta)^{n-2}$; таким образом, площадь

[1]) Буква Г употребляется в дальнейшем также для обозначения эйлерова интеграла, но смешения возникнуть не может.

элементарной зоны дается выражением

$$\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}(r\sin\theta)^{n-2}\,r\,d\theta. \tag{V, 3; 15}$$

В любой такой зоне подинтегральная функция в сферическом интеграле $I(r)$ равна $e^{-2i\pi r\rho\cos\theta}\Phi(r)$; таким образом, вклад элементарной зоны в сферический интеграл составляет

$$\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}e^{-2i\pi\rho r\cos\theta}(r\sin\theta)^{n-2}\Phi(r)\,r\,d\theta, \tag{V, 3; 16}$$

так что окончательно сферический интеграл равен интегралу

$$I(r)=\int_0^\pi \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}e^{-2i\pi r\rho\cos\theta}(r\sin\theta)^{n-2}\Phi(r)\,r\,d\theta=$$

$$=r^{n-1}\Phi(r)\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^\pi e^{-2i\pi\rho r\cos\theta}(\sin\theta)^{n-2}\,d\theta. \tag{V, 3; 17}$$

В этом интеграле мы узнаём функцию Бесселя. Напомним, что

$$J_\nu(x)=\frac{(x/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi e^{\pm ix\cos\theta}\sin^{2\nu}\theta\,d\theta. \tag{V, 3; 18}$$

При $\nu=\frac{n-2}{2}$, $x=2\pi\rho r$ находим

$$J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi\rho r)=\frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}\rho^{\frac{n-2}{2}}r^{\frac{n-2}{2}}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^\pi e^{-2i\pi\rho r\cos\theta}(\sin\theta)^{n-2}\,d\theta=$$

$$=\frac{\pi^{\frac{n-3}{2}}\rho^{\frac{n-2}{2}}r^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^\pi e^{-2i\pi\rho r\cos\theta}(\sin\theta)^{n-2}\,d\theta. \tag{V, 3; 19}$$

Отсюда сразу же выводим, что

$$I(r) = 2\pi\rho^{-\frac{n-2}{2}} r^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi\rho r)\,\Phi(r), \qquad \text{(V, 3; 20)}$$

и получаем искомую формулу

$$\Gamma(\rho) = 2\pi\rho^{-\frac{n-2}{2}} \int_0^\infty r^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi\rho r)\,\Phi(r)\,dr, \qquad \text{(V, 3; 21)}$$

которая выражает образ Фурье $\Gamma(\rho)$ через $\Phi(r)$. Полученная формула носит вещественный характер, и поэтому в точности такая же формула имеет место и для преобразования $\overline{\mathscr{F}}$. Отсюда мы получаем двойственную формулу

$$\Phi(r) = 2\pi r^{-\frac{n-2}{2}} \int_0^\infty \rho^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi\rho r)\,\Gamma(\rho)\,d\rho. \qquad \text{(V, 3; 22)}$$

Эти две взаимно обратные формулы устанавливают связь между функциями Φ и Γ переменных r и ρ и представляют собой *преобразование Ганкеля* порядка $\frac{n-2}{2}$.

Рассмотрим случаи $n = 1, 2, 3$, которые интересуют нас более всего.

Случай $n = 1$. Известно, что $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$. Отсюда

$$\Gamma(\rho) = 2\int_0^\infty \cos(2\pi\rho r)\,\Phi(r)\,dr. \qquad \text{(V, 3; 23)}$$

Эта формула является очевидной a priori (а выкладки, проделанные для того, чтобы ее получить, также становятся очевидными при $n = 1$).

В самом деле, мы просто делаем предположение, что f четна. Тогда $C(\lambda)$ также будет четной [формула (V, 1; 28)] и прямая формула (V, 1; 7) дает

$$C(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\lambda x} f(x)\,dx = \quad \text{(поскольку интеграл с синусом равен нулю)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi\lambda x f(x)\,dx = 2\int_0^\infty \cos 2\pi\lambda x f(x)\,dx. \qquad \text{(V, 3; 24)}$$

Этот результат совпадает с (V, 3; 23).

Случай $n=2$. Имеем

$$\Gamma(\rho)=2\pi\int_0^\infty rJ_0(2\pi\rho r)\,\Phi(r)\,dr. \qquad (V, 3; 25)$$

Эту формулу можно было бы получить, переходя к полярным координатам (r, θ) в формуле (V, 3; 1). То, что мы проделали в общем случае, является не чем иным, как обобщением на произвольное n этого перехода к полярным координатам.

Случай $n=3$. Известно, что $J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$. Отсюда

$$\Gamma(\rho)=\frac{2}{\rho}\int_0^\infty r\sin(2\pi\rho r)\,\Phi(r)\,dr. \qquad (V, 3; 26)$$

Мы видим, что и в общем случае при нечетном n в формулах будут участвовать тригонометрические функции, а при четном n — функции Бесселя с целым индексом.

Пример. Вычислим при $n=2$ образ Фурье функции Φ, равной 1 при $r<R$ и равной 0 при $r>R$:

$$\Gamma(\rho)=2\pi\int_0^R rJ_0(2\pi\rho r)\,dr. \qquad (V, 3; 27)$$

Напомним, что функции Бесселя удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu(\lambda x))=\lambda x^\nu J_{\nu-1}(\lambda x). \qquad (V, 3; 28)$$

Отсюда

$$\frac{d}{dr}(rJ_1(2\pi\rho r))=2\pi\rho rJ_0(2\pi\rho r), \qquad (V, 3; 29)$$

что позволяет вычислить наш интеграл:

$$\Gamma(\rho)=\frac{R}{\rho}J_1(2\pi R\rho). \qquad (V, 3; 30)$$

Эта формула используется в теории дифракции и во многих других вопросах. Ее можно было бы получить непосредственно из (V, 3; 1) переходом к полярным координатам.

§ 4. Одно физическое приложение интеграла Фурье: решение уравнения теплопроводности

Рассмотрим стержень бесконечной длины, в котором тепло может распространяться только за счет теплопроводности. Удельную теплоемкость мы обозначим c (теплоемкость на единицу длины); теплопроводность обозначим γ; это означает, что если градиент температуры в точке x равен θ, то количество тепла, которое проходит слева направо через точку x за единицу времени, равно $-\gamma\theta$.

Наконец, мы предположим, что источники тепла расположены вдоль стержня; говорят, что плотность источников тепла в точке x в момент времени t есть $\rho(x, t)$ (ρ имеет произвольный знак), если количество тепла, производимого источниками в интервале $(x, x+dx)$ в течение времени $(t, t+dt)$, равно $\rho\,dx\,dt$. Мы считаем, что, помимо этих источников, никакой обмен теплом с внешней средой за счет излучения или теплопереноса не происходит. Определим, как изменяется с течением времени температура U в различных точках стержня. U является неизвестной функцией x и t. Напишем уравнение теплового баланса для участка $(x, x+dx)$. За время $(t, t+dt)$ этот участок получает от соприкасающихся с ним источников количество тепла, равное $\rho(x, t)\,dx\,dt$. За счет теплопроводности он получает количество тепла, равное

$$\left[\gamma\frac{\partial U}{\partial x}(x+dx, t)-\gamma\frac{\partial U}{\partial x}(x, t)\right]dt=\gamma\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,dx\,dt, \qquad (\text{V}, 4; 1)$$

ибо градиент температуры в точке x равен $\frac{\partial U}{\partial x}$.

Полное количество полученного тепла составляет

$$\left(\rho+\gamma\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)dx\,dt. \qquad (\text{V}, 4; 2)$$

Поскольку теплоемкость участка равна $c\,dx$, а увеличение температуры равно $\frac{\partial U}{\partial t}\,dt$, имеем

$$c\frac{\partial U}{\partial t}-\gamma\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\rho. \qquad (\text{V}, 4; 3)$$

Это уравнение называется уравнением теплопроводности. Мы предположим, что оно остается справедливым, даже когда U и ρ — распределения. Очень важны следующие случаи, когда ρ является распределением:

а) $\rho(x, t)=\delta(x)$. Это означает, что единственный источник является точечным, он помещен в точку O и производит единичное количество тепла в единицу времени;

b) $\rho(x, t) = \delta(x)\delta(t)$. Это означает, что источник помещен в точку O, действует только в момент $t = 0$ и выделяет в этот момент в точке O единичное количество тепла

Задача Коши для уравнения (V, 4; 3) (в том случае, когда в него входят только функции) состоит в отыскании решения U при $t > 0$, при заданной правой части $\rho(x, t)$ и заданном начальном распределении температур $U(x, 0) = U_0(x)$.

Мы будем рассуждать скорее интуитивно, чем строго, не пытаясь достигнуть полного обоснования.

Обозначим через $\widetilde{U}$ и $\widetilde{\rho}$ функции U и ρ, продолженные нулем при $t < 0$. Тогда формулы дифференцирования (в смысле теории распределений) разрывных функций дают нам соотношения

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U}}{\partial x^2} = \left\{ \frac{\partial^2 \widetilde{U}}{\partial x^2} \right\}, \quad \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial t} \right\} + U_0(x)\delta(t), \tag{V, 4; 4}$$

так что $\widetilde{U}$ удовлетворяет уравнению в частных производных

$$c\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial t} - \gamma\frac{\partial^2 \widetilde{U}}{\partial x^2} = \widetilde{\rho} + c\widetilde{U}_0(x)\delta(t). \tag{V, 4; 5}$$

Мы предположим, что при любом t функция ρ, как функция только от x, является умеренной; следовательно, при всяком фиксированном t она имеет образ Фурье (равный нулю при $t < 0$):

$$\widetilde{\sigma}(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\rho}(x, t)\, e^{-2i\pi\lambda x}\, dx. \tag{V, 4; 6}$$

Мы предположим, что функция $U_0(x)$ умеренная, следовательно, она также имеет образ Фурье:

$$V_0(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} U_0(x)\, e^{-2i\pi\lambda x}\, dx. \tag{V, 4; 7}$$

(Величина V_0 является заданной.)

Выясним, существует ли решение задачи Коши, также являющееся при любом t умеренной функцией от x. Если это так, то при любом фиксированном t решение будет иметь образ Фурье (равный нулю при $t < 0$):

$$\widetilde{V}(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{U}(x, t)\, e^{-2i\pi\lambda x}\, dx. \tag{V, 4; 8}$$

Поскольку преобразование Фурье производится только по x при фиксированном t, частное дифференцирование по t остается частным дифференци-

рованием по t $\left[\text{точнее, образом Фурье для } \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial t} \text{ служит } \frac{\partial \widetilde{V}}{\partial t}\right.$; это вытекает из дифференцирования под знаком $\int$ в формуле (V, 4; 8)$\left.\right]$. Частное же дифференцирование по x превращается в умножение на $2i\pi\lambda$ [см. формулу (V, 2; 19)]. Следовательно, $\widetilde{V}(\lambda, t)$ удовлетворяет соотношению

$$c\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial t} + 4\pi^2\gamma\lambda^2\widetilde{V} = \widetilde{\sigma}(\lambda, t) + cV_0(\lambda)\,\delta(t). \qquad \text{(V, 4; 9)}$$

Теперь мы будем рассматривать это соотношение как дифференциальное уравнение по t при фиксированном λ [дифференциальное уравнение в смысле теории распределений, так как в нем фигурирует $\delta(t)$]. Поскольку носители всех величин лежат в области $t > 0$, это уравнение при фиксированном λ представляет собой уравнение в свертках в алгебре $(\mathscr{D}'_+)_t$. Его можно переписать в виде

$$\left(c\frac{\partial\delta}{\partial t} + 4\pi^2\gamma\lambda^2\delta(t)\right) \underset{(t)}{*} \widetilde{V}(\lambda, t) = \widetilde{\sigma}(\lambda, t) + cV_0(\lambda)\,\delta(t), \qquad \text{(V, 4; 10)}$$

где свертка производится по t при фиксированном λ.

Обратным элементом для

$$A = c\delta' + 4\pi^2\gamma\lambda^2\delta \qquad \text{(V, 4; 11)}$$

в алгебре $(\mathscr{D}'_+)_t$ является элемент

$$A^{-1} = \frac{Y(t)}{c}\,e^{-4\pi^2\frac{\gamma}{c}\lambda^2 t} \qquad \text{(V, 4; 12)}$$

[см. формулу (III, 2; 62) или предложение 14 гл. III].

Поэтому решением уравнения (V, 4; 10) служит распределение

$$\widetilde{V}(\lambda, t) = \widetilde{\sigma}(\lambda, t) \underset{(t)}{*} \frac{1}{c}\,Y(t)\,e^{-4\pi^2\frac{\gamma}{c}\lambda^2 t} + V_0(\lambda)\,e^{-4\pi^2\frac{\gamma}{c}\lambda^2 t}. \qquad \text{(V, 4; 13)}$$

Если $\widetilde{\sigma}(\lambda, t)$ при фиксированном λ является функцией от t, то первый из этих членов — свертка — записывается в виде

$$\frac{1}{c}\int\limits_0^t \sigma(\lambda, \tau)\,e^{-4\pi^2\frac{\gamma}{c}\lambda^2(t-\tau)}\,d\tau \qquad \text{(V, 4; 14)}$$

при $t > 0$.

Однако преимущество формулы (V, 4; 13) состоит в том, что она может быть написана даже в случае распределений.

Коль скоро $\tilde{V}(\lambda, t)$ найдено, преобразование Фурье $\overline{\mathcal{F}}$ при любом фиксированном t восстанавливает решение $\tilde{U}(x, t)$ (по определению, всегда равное нулю при $t<0$).

В качестве примера предположим, что температура стержня при $t<0$ равна 0 и что именно в момент $t=0$ источник, помещенный в точку $x=0$, отдает стержню единичное количество тепла. Тогда $U_0(x)=0$, $\tilde{\rho}(x, t)=$ $=\delta(x)\,\delta(t)$ и, значит, $V_0(\lambda)=0$, $\tilde{\sigma}(\lambda, t)=\delta(t)$.

По формуле (V, 4; 13) получаем

$$\tilde{V}(\lambda, t)=\frac{1}{c}\,Y(t)\,e^{-4\pi^2\frac{\gamma}{c}\lambda^2 t} \qquad (V,\ 4;\ 15)$$

и восстанавливаем $\tilde{U}(x, t)$ по формуле (V, 1; 38):

$$\tilde{U}(x, t)=\frac{1}{c}\,Y(t)\,\frac{1}{2\sqrt{(\gamma/c)\,\pi t}}\,e^{-\frac{x^2}{4(\gamma/c)\,t}}. \qquad (V,\ 4;\ 16)$$

Эта функция называется элементарным решением уравнения теплопроводности. Сделаем некоторые замечания.

1) Как бы мало ни было $t>0$, температура будет >0 в любой точке стержня: *тепло распространяется с бесконечной скоростью.* (И все же при больших $|x|$ температура долгое время остается очень малой.)

2) При любом t кривая, которая представляет функцию U (на плоскости x, U), является колоколообразной кривой Гаусса. Ее максимум достигается в точке $x=0$, он равен

$$U(0, t)=\frac{1}{c}\,Y(t)\,\frac{1}{2\sqrt{(\gamma/c)\,\pi t}}.$$

В момент, когда в точке $x=0$ действует источник, температура этой точки становится равной $+\infty$, а затем спадает при $t>0$ как $1/\sqrt{t}$.

В любой точке $x\neq 0$ температура стремится к нулю при $t\to 0$ и чем меньше t, тем резче выражен максимум колоколообразной кривой в точке $x=0$.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ V

Упражнение V-1. 1°. Пусть f и g — две функции, определенные на R и принадлежащие L^1. Показать, что свертка

$$h(x)=f*g=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\,dy$$

также принадлежит L^1 и что выполняется неравенство

$$\|h\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}.$$

2°. Показать непосредственно, что

$$\mathcal{F}h = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g.$$

Упражнение V-2. 1°. Показать, что преобразование Фурье нечетного (соответственно четного) распределения есть нечетное (соответственно четное) распределение.

2°. Найти все нечетные распределения, являющиеся решениями уравнения $xT = 1$.

3°. Вывести отсюда преобразование Фурье распределения $\operatorname{vp}\frac{1}{x}$.

Упражнение V-3. Преобразовать по Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{при } |x| < 1, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Проверить, что преобразование Фурье бесконечно дифференцируемо.

Упражнение V-4. Рассматривается умеренное распределение $|x|$.

1°. Вычислить $\delta'' * |x|$.

2°. Вывести отсюда, что $\mathcal{F}(|x|)$ имеет вид $A\operatorname{Pf}\frac{1}{\lambda^2} + C\delta$, где A и C — постоянные. Определить A.

3°. Вычислить $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{vp}\frac{1}{x}\right)$. Вывести отсюда $\mathcal{F}\left(\operatorname{Pf}\frac{1}{x^2}\right)$ и получить затем постоянную C.

(Здесь используется преобразование $\mathcal{F}\left(\operatorname{vp}\frac{1}{x}\right)$, найденное в упражнении V-2.)

Упражнение V-5. Показать, что если преобразование Фурье распределения $T \in \mathcal{S}'$ имеет вид $\mathcal{F}[T] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\delta_{(n)}$, то распределение T периодично, а числа c_n являются его коэффициентами Фурье.

Упражнение V-6. (Новое доказательство формулы $\mathcal{F}1 = \delta$.) Пространство $\mathcal{S}'$ снабжается следующей топологией: говорят, что распределение T_A, зависящее от параметра A, стремится в $\mathcal{S}'$ к распределению T при $A \to \infty$, если $\langle T_A, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$, при $A \to \infty$, для любой функции φ из $\mathcal{S}$,

a) Показать, что если $T_A \to T$ в $\mathscr{S}'$, то $\mathscr{F}T_A \to \mathscr{F}T$ в $\mathscr{S}'$.

b) Рассмотреть распределение

$$T_A = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leqslant A, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Вычислить $\mathscr{F}T_A$.

c) Показать, что $T_A \to 1$ в $\mathscr{S}'$, когда $A \to \infty$, и что распределение $\mathscr{F}T_A$, вычисленное в пункте b), стремится к δ *в пространстве* $\mathscr{S}'$. Вывести отсюда формулу $\mathscr{F}1 = \delta$.

Упражнение V-7. (Письменный экзамен, Париж, 1959.)

Первый вопрос.

Каковы образы Фурье следующих функций и распределений на прямой:

$\delta_{(a)}$ — единичная масса в точке с абсциссой a?
$e^{2i\pi x}$, $e^{-2i\pi x}$, $\cos 2\pi x$, $\sin 2\pi x$? [1])

Рассматривается следующая функция:

$$f(x) = -\frac{\cos 2\pi x}{\pi^2 x^2} + \frac{\sin 2\pi x}{2\pi^3 x^3}.$$

Она определена при $x \neq 0$. Показать, что при $x \to 0$ она имеет предел, и вычислить этот предел.

Положим

$$g(x) = (-2i\pi x)^3 f(x).$$

Чему равен образ Фурье D_λ функции $g(x)$?

Вывести отсюда, что образ Фурье $C(\lambda)$ функции f удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению, и выписать это уравнение.

Второй вопрос.

Показать, что существует решение $C_0(\lambda)$ этого дифференциального уравнения, которое является функцией от λ, обращающейся в нуль вне интервала $(-1, 1)$. Каково общее решение этого дифференциального уравнения? Используя тот факт, что $C_0(\lambda)$ имеет ограниченный носитель и что $f(x)$ является функцией, показать, что обязательно $C(\lambda) = C_0(\lambda)$.

Написать для $f(x)$ и $C(\lambda)$ обратную формулу Фурье. Произвести прямое вычисление интеграла, дающего $\overline{\mathscr{F}}C(\lambda)$, и восстановить, таким образом, $f(x)$.

---

[1]) Здесь используется предыдущий результат и формула двойственности Фурье.

Третий вопрос.

Рассматривается функция $\Gamma(\lambda)$, равная $C(\lambda)$ в интервале $(-1, +1)$ и продолженная вне этого интервала как периодическая функция с периодом **2**. Показать, что предыдущие вычисления автоматически дают ее коэффициенты Фурье; написать ее ряд Фурье; установить, что он является сходящимся. Записав его сумму при $\lambda = 1$, вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Упражнение V-8. Напомним, что если произведение двух целых голоморфных функций $U(\lambda)$ и $V(\lambda)$ комплексного переменного λ равно нулю, то по меньшей мере одна из этих двух функций равна нулю. Используя это свойство, показать, что если S и T — два распределения с ограниченными носителями на прямой R (т. е. если S и $T \in \mathscr{E}'$) и если S и T удовлетворяют соотношению

$$S * T = 0,$$

то по меньшей мере одно из этих распределений S или T равно нулю. Это утверждение становится, естественно, ложным, если хотя бы одно из этих двух распределений не принадлежит $\mathscr{E}'$.

Пример: пусть $S = 1 \in \mathscr{D}'$; $T = \delta' \in \mathscr{E}'$, тогда $S * T = 0$.

Упражнение V-9. Рассмотрим прямую R. Обозначим через H^1 пространство функций f, которые принадлежат L^2 вместе со своей первой производной $\frac{df}{dx}$ (в смысле теории распределений). Снабдим это пространство скалярным произведением

$$((f, g))_1 = (f, g)_{L^2} + \left(\frac{df}{dx}, \frac{dg}{dx}\right)_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx} \cdot \overline{\frac{dg}{dx}}\,dx. \quad (1)$$

1) Показать, что H^1, снабженное скалярным произведением (1), является пространством Гильберта.

Обозначим через $\|.\|_1$ норму, определяемую скалярным произведением (1).

2) Доказать следующий результат: для того чтобы умеренное распределение f принадлежало H^1, необходимо и достаточно, чтобы

$$(1 + \lambda^2)^{1/2} \hat{f}(\lambda) \in L^2,$$

где через $\hat{f}(\lambda)$ обозначено преобразование Фурье от f.

3) Для $f \in H'$ положим

$$|||f|||_1 = \|(1 + \lambda^2)^{1/2} \hat{f}(\lambda)\|_{L^2}.$$

Показать, что нормы $\|\cdot\|_1$ и $|||\cdot|||_1$ эквивалентны в H^1.

Упражнение V-10. Пусть $\mathcal{F}U$ — распределение от переменного $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — обозначает преобразование Фурье распределения U от переменного $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Положим

$$r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}, \quad \rho = \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}.$$

Установить формулу

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{r^k}\right) = \pi^{k - \frac{n}{2}} \frac{\Gamma((n-k)/2)}{\Gamma(k/2)} \frac{1}{\rho^{n-k}}, \tag{1}$$

где k — вещественное число, $n/2 < k < n$ (n — число координат). Решение задачи начинается с доказательства того, что $\mathcal{F}(r^{-k})$ пропорционально $\rho^{-(n-k)}$. Затем используется равенство

$$\langle f, \mathcal{F}g\rangle = \langle \mathcal{F}f, g\rangle$$

с $f = r^{-k}$ и с подходяще выбранной из $\mathcal{S}$ функцией g. Что происходит при $k = n/2$?

Дать простое выражение для $\mathcal{F}(r^{2p})$, $p \geqslant 0$.

Предположим теперь, что $n = 1$. Примем без доказательства формулу

$$\mathcal{F}(\lg|x|) = -\frac{1}{2}\operatorname{Pf}\left(\frac{1}{|y|}\right) - (C + \lg 2\pi)\,\delta, \tag{2}$$

где C — постоянная Эйлера, а $\operatorname{Pf}(1/|y|)$ — распределение, определяемое равенством

$$\left\langle \operatorname{Pf}\left(\frac{1}{|y|}\right), \varphi(y)\right\rangle = -\int_0^{\infty} \varphi'(y)\lg y\,dy + \int_{-\infty}^{0} \varphi'(y)\lg|y|\,dy.$$

$\varphi \in \mathcal{D}$. (Сравните с упражнением II-14.)

Получить из формулы (2) выражения для преобразований

$$\mathcal{F}\left(\operatorname{vp}\frac{1}{x}\right), \quad \mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right), \quad \mathcal{F}(Y(x)), \quad \mathcal{F}(Y(x)\,x^m),$$

где $Y(x)$ — функция Хевисайда; m — целое $\geqslant 1$.

Упражнение V-11. Полином Эрмита $H_m(x)$ при целом неотрицательном m определяется равенством

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(e^{-2\pi x^2}\right) = (-1)^m \sqrt{m!}\, 2^{m - 1/4}\, \pi^{\frac{m}{2}} H_m(x)\, e^{-2\pi x^2}. \tag{1}$$

Функция Эрмита $\mathcal{H}_m(x)$ — равенством

$$\mathcal{H}_m(x) = H_m(x)\, e^{-\pi x^2}. \tag{2}$$

Первый вопрос.

a) Вычислить $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$.

b) Используя равенство

$$\frac{d}{dx}(e^{-2\pi x^2}) + 4\pi x e^{-2\pi x^2} = 0,$$

показать, что при $m \geqslant 1$ выполняется соотношение

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(e^{-2\pi x^2}) + 4\pi x \frac{d^m}{dx^m}(e^{-2\pi x^2}) + 4m\pi \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(e^{-2\pi x^2}) = 0.$$

Вывести отсюда рекуррентные формулы:

$$\frac{d}{dx} H_m(x) = 2\sqrt{m\pi}\, H_{m-1}(x) \tag{3}$$

и

$$2\sqrt{\pi(m+1)}\, H_{m+1}(x) - 4\pi x H_m(x) + 2\sqrt{m\pi}\, H_{m-1}(x) = 0. \tag{4}$$

c) Показать, что $H_m(0)$ равно нулю при нечетном m и что при четном m, $m = 2n$, справедливо равенство

$$H_{2n}(0) = 2^{\frac{1}{4}} \frac{(-1)^n \sqrt{(2n)!}}{n!2^n}. \tag{5}$$

Второй вопрос.

a) Показать, что $\mathscr{H}_m(x)$ — элемент пространства $\mathscr{S}$ быстро убывающих функций. Показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{H}_p(x)\, \mathscr{H}_q(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } p \neq q, \\ 1, & \text{если } p = q. \end{cases} \tag{6}$$

b) Напомним, что преобразование Фурье $\mathscr{F}[f(x)]$ функции f определяется равенством

$$\mathscr{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\lambda x} f(x)\, dx.$$

Показать, что

$$\mathscr{F}[e^{-\pi x^2}] = e^{-\pi\lambda^2},$$

и вывести отсюда, что

$$\mathscr{F}[\mathscr{H}_m(x)] = (-1)^m \mathscr{H}_m(x). \tag{7}$$

Третий вопрос.

Пусть T — умеренное распределение. Разложением T по функциям Эрмита называют ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(T) \mathscr{H}_m,$$

где

$$a_m(T) = \langle T, \mathscr{H}_m \rangle.$$

a) Написать разложение меры Дирака δ по функциям Эрмита.

b) Рассмотрим преобразования $\mathcal{J}_+$ и $\mathcal{J}_-$ умеренного распределения T:

$$\mathcal{J}_+(T) = \frac{dT}{dx} + 2\pi x T, \tag{8}$$

$$\mathcal{J}_-(T) = -\frac{dT}{dx} + 2\pi x T. \tag{9}$$

Преобразования (8) и (9) определены, в частности, для любой функции из пространства $\mathscr{S}$. Используя формулы (3) и (4), показать, что

$$\mathcal{J}_+(H_m) = 2\sqrt{\pi m}\,\mathscr{H}_{m-1} \quad \text{при} \quad m \geqslant 1,$$

$$\mathcal{J}_-(H_m) = 2\sqrt{\pi(m+1)}\,\mathscr{H}_{m+1} \quad \text{при} \quad m \geqslant 0.$$

Показать, что разложение δ по функциям Эрмита, найденное ранее, сходится в $\mathscr{S}'$ к некоторому распределению S, вычислить $\mathcal{J}_+(S)$ и $\mathcal{J}_-(S)$ и вывести отсюда, что S имеет вид $C\delta$. Используя формулы (6), показать, что $C = 1$.

c) Получить отсюда значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{H}_m(\lambda)\, d\lambda,$$

используя равенство (7).

Упражнение V-12. Обозначим через (C) конус

$$v^2 t^2 - x^2 \geqslant 0, \quad t \geqslant 0,$$

на плоскости (x, t); v — данная константа.

Обозначим через $E_x(t)$ распределение, равное $v/2$ внутри конуса и равное 0 вне него.

1°. Вычислить преобразование Фурье $\widehat{E}_\lambda(t)$ распределения $E_x(t)$ по x при фиксированном t.

2°. Найти умеренное элементарное решение для оператора

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

используя преобразование Фурье по одному переменному x.

Сравнить результат с результатом упражнения II-20.

ГЛАВА VI

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

§ 1. Преобразование Лапласа от функций

Преобразованием Лапласа называют преобразование, которое всякой комплекснозначной локально суммируемой функции $f(t)$ вещественного переменного t, равной нулю при $t < 0$ и подчиненной, кроме того, подходящим условиям, ставит в соответствие голоморфную функцию $F(p)$ комплексного переменного p, определяемую интегралом

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt. \qquad \text{(VI, 1; 1)}$$

Это соотношение записывают так:

$$f(t) \supset F(p), \qquad \text{(VI, 1; 2)}$$

функцию $f(t)$ называют оригиналом, функцию $F(p)$ — изображением. Интеграл (VI, 1; 1) называют интегралом Лапласа.

Абсцисса абсолютной сходимости

Модуль функции $f(t) e^{-pt}$ равен $|f(t)| e^{-\xi t}$, если $p = \xi + i\eta$. Таким образом, суммируемость (или абсолютная сходимость) интеграла (VI, 1; 1) зависит только от вещественной части ξ переменного p.

Предложение 1. *Если интеграл* (VI, 1; 1) *при* $\xi = \xi_0$ *суммируем, то он будет суммируем при* $\xi \geqslant \xi_0$ *и притом равномерно по* p.

В самом деле, $|f(t)| e^{-\xi t} \leqslant |f(t)| e^{-\xi_0 t}$ при $\xi \geqslant \xi_0$.

Вывод. *Существует такое вещественное число a (произвольного знака), что при $\xi > a$ интеграл* (VI, 1; 1) *суммируем, а при $\xi < a$ не суммируем.*

В самом деле, обозначим через a нижнюю грань чисел ξ, для которых функция $|f(t)| e^{-\xi t}$ суммируема. Если $\xi > a$, то по определению числа a существует такое число ξ_0, лежащее между a и ξ, что функция $f(t) e^{-\xi_0 t}$ суммируема, а следовательно, суммируема и $|f(t)| e^{-\xi t}$ в силу предложения 1.

Пусть теперь $\xi < a$, и пусть ξ_1 лежит между ξ и a. Если бы функция $|f(t)|\,e^{-\xi t}$ была суммируемой, то в силу предложения 1 функция $|f(t)|\,e^{-\xi_1 t}$ также была бы суммируемой, что противоречило бы определению числа a. В итоге число a определяется *сечением* между теми ξ, при которых интеграл (VI, 1; 1) суммируем, и теми ξ, при которых он не суммируем.

Заметим, что при $\xi = a$ интеграл может быть как суммируемым, так и не суммируемым.

Число a называется абсциссой суммируемости, или абсолютной сходимости, интеграла Лапласа. Область $\xi > a$ называется областью суммируемости интеграла Лапласа.

Если $a = -\infty$, то интеграл (VI, 1; 1) суммируем при любом (комплексном) значении p; если же, напротив, $a = +\infty$, то интеграл (VI, 1; 1) ни при каком p не суммируем.

Предложение 2. *Если функция f локально суммируема и удовлетворяет при $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ оценке*

$$|f(t)| \leqslant Ae^{kt}, \qquad \text{(VI, 1; 3)}$$

где $A > 0$, k — вещественное число (произвольного знака), то абсцисса суммируемости a не превосходит k, $a \leqslant k$.

Мы должны показать, что при $\xi > k$ интеграл (VI, 1; 1) суммируем. При $t \geqslant t_0$ выполняется оценка

$$|f(t)|\,e^{-\xi t} \leqslant Ae^{-(\xi-k)t}, \qquad \text{(VI, 1; 4)}$$

правая часть которой суммируема, поскольку $\xi - k > 0$. Поэтому функция $|f(t)|\,e^{-\xi t}$ суммируема на луче от t_0 до $+\infty$. Но она суммируема и на отрезке от 0 до t_0, поскольку функция f локально суммируема. Таким образом, функция $|f(t)|\,e^{-\xi t}$ суммируема на луче 0 до $+\infty$, что и требовалось доказать.

В частности, если f ограничена, то абсцисса суммируемости a неположительна ($a \leqslant 0$), иначе говоря, интеграл (VI, 1; 1) суммируем при $\xi > 0$.

Если функция f локально суммируема и имеет *компактный носитель* (при этом функция f будет просто суммируемой), то приведенная выше оценка справедлива при любом k (и даже с $A = 0$), когда $t \geqslant t_0$, где t_0 достаточно большое число. Следовательно, $a = -\infty$ и функция $F(p)$ определена при любом p. Вообще это явление будет наблюдаться, если *при любом* $k < 0$ функция f допускает оценку (VI, 1; 3) при достаточно больших t. Например, абсцисса суммируемости для

$$f(t) = Y(t)\,e^{-t^2} \qquad \text{(VI, 1; 5)}$$

равна $-\infty$.

Напротив, для функции

$$f(t) = Y(t)\, e^{t^2} \qquad \text{(VI, 1; 6)}$$

интеграл (VI, 1; 1) никогда не является суммируемым, $a = +\infty$.

Предложение 3. *Если a — абсцисса суммируемости интеграла Лапласа от функции f, то функция $F(p)$ голоморфна при $\xi > a$. В области $\xi > a$ справедливы равенства*

$$F^{(m)}(p) = \int_0^\infty f(t)(-t)^m e^{-pt}\, dt. \qquad \text{(VI, 1; 7)}$$

Иначе говоря,

$$(-t)^m f(t) \supset F^{(m)}(p). \qquad \text{(VI, 1; 8)}$$

Абсцисса суммируемости интеграла Лапласа для функции $(-t)^m f(t)$ совпадает с абсциссой суммируемости для функции $f(t)$.

Докажем сначала последнюю часть теоремы. Поскольку f всегда предполагается локально суммируемой, достаточно рассуждать при $t \geqslant 1$; при этих t степень t^m также $\geqslant 1$, и поэтому из суммируемости функции $(-t)^m f(t)\, e^{-\xi t}$ вытекает суммируемость $f(t)\, e^{-\xi t}$. Иначе говоря, абсцисса суммируемости для функции $(-t)^m f(t)$ не меньше a.

Напротив, при любом $\varepsilon > 0$ для достаточно больших t выполняется неравенство $t^m \leqslant e^{\varepsilon t}$, следовательно, $|(-t)^m f(t)|\, e^{-\xi t} \leqslant |f(t)|\, e^{-(\xi - \varepsilon) t}$ для достаточно больших t; при $\xi - \varepsilon > a$, т. е. при $\xi > a + \varepsilon$, последняя функция суммируема, а, значит, абсцисса суммируемости для $(-t)^m f(t)$ не превосходит $a + \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ — произвольно, эта абсцисса не превосходит a. Из двух установленных неравенств заключаем, что эта абсцисса равна a. После этого первая часть теоремы становится очевидной, ибо мы имеем право дифференцировать по p интеграл (VI, 1; 1), задающий функцию $F(p)$, под знаком $\int$, если продифференцированный интеграл равномерно суммируем. Но как раз эта равномерная суммируемость и имеет место при $\xi > a$. Отсюда мы получаем формулу (VI, 1; 7), равносильную (VI, 1; 8). Функция $F(p)$ *голоморфна* при $\xi > a$, поскольку в этой области она дифференцируема по комплексному переменному p.

На практике попадаются интересные случаи, когда интеграл Лапласа сходится, но не суммируется (т. е. условно сходится). Однако мы не будем заниматься здесь этими случаями.

§ 2. Преобразование Лапласа от распределений

1. Определение. Если изменить функцию f на множестве меры нуль, то ее интеграл Лапласа $F(p)$ не изменится. Таким образом, в действительности функция $F(p)$ сопоставляется классу функций f, т. е. $F(p)$ сопоставляется распределению, задаваемому локально суммируемой функцией f.

Пусть, в общем случае, T — распределение на вещественной оси переменного t с носителем, лежащим на луче $t \geqslant 0$. Иными словами, пусть $T \in \mathscr{D}'_+$. Пусть, кроме того, существует такое число ξ_0, что при $\xi > \xi_0$ распределение $e^{-\xi t}T$ принадлежит $\mathscr{S}'$. Тогда T обладает преобразованием Лапласа

$$\mathcal{J}(p) = \langle T,\ e^{-pt}\rangle, \qquad \text{(VI, 2; 1)}$$

определенным при $\xi > \xi_0$. В самом деле, пусть $\alpha(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция с ограниченным слева носителем, равная 1 в окрестности носителя T. При $\xi > \xi_0$ выберем число ξ_1, удовлетворяющее неравенствам $\xi_0 < \xi_1 < \xi$. Тогда $e^{-\xi_1 t}T \in \mathscr{S}'$ и $\alpha(t)\, e^{-(p-\xi_1)t} \in \mathscr{S}$ и, следовательно, выражение

$$\langle e^{-\xi_1 t}T,\ \alpha(t)\, e^{-(p-\xi_1)t}\rangle$$

имеет смысл. Это выражение не зависит от ξ_1; *по определению*, оно и дает нам форму $\langle T,\ e^{-pt}\rangle$.

Заметим, что определение (VI, 2; 1) является разумным обобщением определения (VI, 1; 1). Мы были вынуждены наложить на T некоторые ограничения, ибо хотя функция e^{-pt} и является бесконечно дифференцируемой по t, ее носитель не ограничен, так что правая часть равенства (VI, 2; 1) не имеет смысла, когда T — произвольное распределение.

Можно доказать, что $\mathcal{J}(p)$ будет голоморфной функцией от p при $\xi > \xi_0$ и что снова

$$(-t)^m\, T \supset \mathcal{J}^{(m)}(p). \qquad \text{(VI, 2; 2)}$$

Преобразование Лапласа, разумеется, линейно: если $S \supset \mathscr{S}(p)$ при $\xi > b_1$ и $T \supset \mathcal{J}(p)$ при $\xi > b_2$, то $S + T \supset \mathscr{S}(p) + \mathcal{J}(p)$ при $\xi > \max(b_1,\ b_2)$ и $\lambda S \supset \lambda\mathscr{S}(p)$ при $\xi > b_1$.

2. Примеры преобразований Лапласа. 1) Справедливы формулы

$$\left.\begin{aligned} &\delta \supset 1, \\ &\delta^{(m)} \supset p^m, \ m \text{ целое } \geqslant 0, \\ &\delta_{t-a} \supset e^{-ap}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI, 2; 3)}$$

Эти формулы сразу же вытекают из определения (VI, 2; 1). Они справедливы при любом p, потому что речь идет о распределениях с ограниченным носителем.

2) Пусть T — распределение, образованное массами C_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ в точках с целочисленными абсциссами $0, 1, 2, \ldots$.

Тогда соотношение

$$\delta_{t-n} \supset e^{-np}$$

приводит к соотношению

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \delta_{t-n} \supset \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-np}. \tag{VI, 2; 4}$$

Положим $e^{-p} = Z$, при этом правая часть запишется в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n Z^n. \tag{VI, 2; 5}$$

Мы видим, таким образом, что сходящийся степенной ряд является, с точностью до замены переменного, некоторым преобразованием Лапласа. Область определения преобразования Лапласа, которая была полуплоскостью, превращается при этой замене переменного в круг сходимости.

3)

$$\left.\begin{aligned} Y(t) &\supset \frac{1}{p} && \text{при} \quad \xi > 0; \\ Y(t)\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} &\supset \frac{1}{p^{\alpha}}, \quad \alpha > 0, && \text{при} \quad \xi > 0; \\ Y(t)\, e^{\lambda t}\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} &\supset \frac{1}{(p-\lambda)^{\alpha}}, \quad \alpha > 0, && \text{при} \quad \xi > \operatorname{Re}\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{VI, 2; 6}$$

Ветвь функции $(p-\lambda)^{\alpha}$ в полуплоскости $\xi > \operatorname{Re}\lambda$ выбирается так, чтобы она была вещественной положительной при вещественных положительных значениях $p-\lambda$ и непрерывной при $\xi > \operatorname{Re}\lambda$.

Вторая из формул (VI, 2; 3) и третья из формул (VI, 2; 6) с целым α позволяют найти оригинал для любой рациональной дроби $P(p)/Q(p)$ от p путем разложения этой дроби на элементарные.

Стоит заметить, что в § 2 гл. III мы обозначили буквой p распределение δ', а под выражением $1/(p-\lambda)^{\alpha}$ при целом α понимали функцию $Y(t)\, e^{\lambda t}\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$. Там p было просто буквой, обозначающей δ'.

Здесь наша точка зрения иная. Распределение δ' имеет изображением Лапласа функцию p, а распределение $Y(t)\, e^{\lambda t}\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ имеет изображением функцию $1/(p-\lambda)^{\alpha}$ *как голоморфную функцию комплексного переменного* p. Однако использование этого остается прежним: свертывание и умножение.

Докажем, например, вторую из формул (VI, 2; 6). Пусть

$$F(p)=\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-pt}\,dt. \tag{VI, 2; 7}$$

Этот интеграл суммируем в окрестности точки $t=0$, поскольку $\alpha>0$. Он суммируем на бесконечности при $\xi>0$ и не суммируем при $\xi\leqslant 0$; оказывается, что полуплоскость голоморфности функции $F(p)$ не шире, чем полуплоскость суммируемости, поскольку у $F(p)$ существует особенность в точке $p=0$.

Если p вещественно, $p=\xi$, то замена переменного $\xi t=u$ сразу же дает результат

$$F(p)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\xi^\alpha}\int_0^\infty e^{-u}u^{\alpha-1}\,du=\frac{1}{\xi^\alpha}. \tag{VI, 2; 8}$$

Если же p комплексно, то заметим, что $F(p)$ должна быть голоморфной функцией p при $\xi>0$ и что эта функция должна равняться $\frac{1}{p^\alpha}=\frac{1}{\xi^\alpha}$ при вещественном $p=\xi$; таким образом, она должна совпадать с указанной ветвью функции $1/p^\alpha$. Это можно увидеть и непосредственно.

Та же самая замена переменного $pt=u$ перемещает путь интегрирования в комплексную плоскость; если обозначить буквой θ аргумент числа p, то

$$F(p)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\,p^\alpha}\int_0^{e^{i\theta}\cdot\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}\,du. \tag{VI, 2; 9}$$

Легко проверяется, что интеграл

$$\int_0^{e^{i\theta}\infty} = \lim_{\substack{A\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int_{e^{i\theta}\varepsilon}^{e^{i\theta}A}$$

можно заменить интегралом

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{e^{i\theta}\varepsilon}^{\varepsilon} + \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ A\to\infty}}\int_{\varepsilon}^{A} + \lim_{A\to\infty}\int_{A}^{e^{i\theta}A} = \int_0^\infty,$$

так что снова

$$\int_0^{e^{i\theta}\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}\,du=\Gamma(\alpha) \tag{VI, 2; 10}$$

и

$$F(p) = \frac{1}{p^{\alpha}}. \qquad \text{(VI, 2; 11)}$$

Входящая сюда ветвь функции p^{α} возникает в результате замены переменного; она такова, что число $p^{\alpha}t^{\alpha} = u^{\alpha}$ должно иметь аргумент, равный $\alpha\theta$,

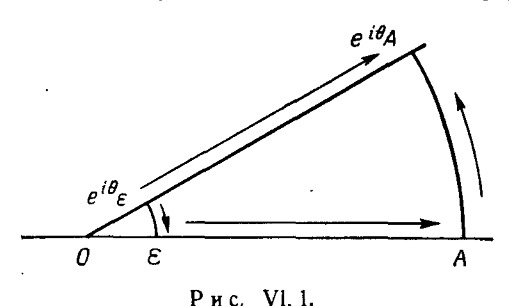


Рис. VI, 1.

и, значит, само число p^{α} должно иметь этот аргумент $\alpha\theta$: $p^{\alpha} = |p|^{\alpha} e^{i\theta\alpha}$; таким образом, в полуплоскости $\xi > 0$ эта ветвь снова совпадает по непрерывности с ветвью, которая вещественна и положительна при вещественном положительном $p\,(p = \xi > 0)$.

Положим, в частности, $\alpha = 1$, $\lambda = \pm i\omega$.
Тогда

$$\left.\begin{aligned} Y(t)\,e^{i\omega t} &\supset \frac{1}{p - i\omega} \quad \text{при} \quad \xi > 0, \\ Y(t)\,e^{-i\omega t} &\supset \frac{1}{p + i\omega} \quad \text{при} \quad \xi > 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI, 2; 12)}$$

Откуда

$$\left.\begin{aligned} Y(t)\cos\omega t &\supset \frac{p}{p^2 + \omega^2} \quad \text{при} \quad \xi > 0, \\ Y(t)\sin\omega t &\supset \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad \text{при} \quad \xi > 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI, 2; 13)}$$

4) Мы хотим доказать формулу

$$Y(t)\,J_0(t) \supset \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}, \quad \xi > 0, \qquad \text{(VI, 2; 14)}$$

где $J_0(t)$ — функция Бесселя; ветвь функции

$$\sqrt{p^2 + 1} = \sqrt{(p + i)(p - i)}$$

выбирается так, чтобы в полуплоскости голоморфности $\xi > 0$ она изменялась непрерывно и принимала вещественное положительное значение при вещественном положительном p $(p = \xi > 0)$.

Мы должны вычислить интеграл

$$F(p) = \int_0^\infty J_0(t)\, e^{-pt}\, dt. \qquad \text{(VI, 2; 15)}$$

Известно, что при $t \geqslant 0$ функция $J_0(t)$ не превосходит 1, и, значит, этот интеграл заведомо сумммируем при $\xi > 0$. В силу асимптотического равенства

$$J_0(t) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{(VI, 2; 16)}$$

этот интеграл не суммируем при $\xi = 0$ [1]). Впрочем, полуплоскость голоморфности не превышает полуплоскости суммируемости $\xi > 0$, как это показывает наличие особенностей у функции $F(p)$ в точках $p = \pm i$.

Воспользуемся, например, разложением $J_0(t)$ в ряд:

$$J_0(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}. \qquad \text{(VI, 2; 17)}$$

Проинтегрируем ряд, задающий $F(p)$, почленно, предполагая, что мы имеем право это сделать. Тогда

$$F(p) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2\, 2^{2m}} \int_0^\infty t^{2m} e^{-pt}\, dt = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2\, 2^{2m}} \cdot \frac{(2m)!}{p^{2m+1}} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2m)} \frac{(-1)^m}{p^{2m+1}} = \qquad \text{(VI, 2; 18)}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-m+1\right)}{m!} \cdot \frac{1}{p^{2m+1}}.$$

Последний ряд является биномиальным; он сходится при $|p| > 1$; сворачивая его в бином при этих значениях p, получаем

$$F(p) = p\left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{-1/2} = p\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{p^2}}} = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \qquad \text{(VI, 2; 19)}$$

при указанном выборе ветви.

---

[1]) Хотя и условно сходится. — *Прим. перев.*

Эта выкладка будет законной, если мы получим конечную величину, заменив члены ряда $\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m} e^{-pt}$ их модулями $\frac{1}{(m!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m} e^{-\xi t}$. Но ведь при $\xi > 1$ мы действительно получаем конечную величину

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m!)^2} \frac{1}{2^{2m}} \frac{(2m)!}{\xi^{2m+1}} = \frac{1}{\xi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-m+1\right)}{m!}\left(-\frac{1}{\xi^2}\right)^m, \tag{VI, 2; 20}$$

равную $1/\sqrt{\xi^2-1}$.

Следовательно, формула (VI, 2; 14) верна при $\xi > 1$.

Однако рассматриваемый интеграл Лапласа в действительности суммируем при $\xi > 0$: поэтому он должен быть голоморфной функцией от p при $\xi > 0$, равной $\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$ при $\xi > 1$; но ведь эта последняя функция также голоморфна при $\xi > 0$, и, следовательно, формула (VI, 2; 14) справедлива при $\xi > 0$, хотя выкладки, которыми она получена, теряют силу при $0 < \xi \leqslant 1$.

5) Если $f(t) \supset F(p)$, то

$$f(\lambda t) \supset \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right), \quad \lambda > 0. \tag{VI, 2; 21}$$

3. Преобразование Лапласа и свертка. Пусть S и T — два распределения из $\mathscr{D}'_-$, имеющие преобразования Лапласа при $\xi > b_1$ и $\xi > b_2$.

Тогда

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{S}(p) &= \langle S,\ e^{-pt}\rangle, \\ \mathscr{T}(p) &= \langle T,\ e^{-pt}\rangle \end{aligned}\right\} \tag{VI, 2; 22}$$

при $\xi > \max(b_1, b_2)$.

Отсюда мы получаем

$$\begin{aligned} \langle S * T,\ e^{-pt}\rangle = \langle S_x \otimes T_y,\ e^{-p(x+y)}\rangle &= \langle S_x \otimes T_y,\ e^{-px}e^{-py}\rangle = \\ &= \langle S_x,\ e^{-px}\rangle\langle T_y,\ e^{-py}\rangle \end{aligned} \tag{VI, 2; 23}$$

или

$$S * T \supset \mathscr{S}(p)\mathscr{T}(p). \tag{VI, 2; 24}$$

Итак,

Предложение 4. *Свертка $S * T$ имеет преобразование Лапласа при $\xi > b = \max(b_1, b_2)$, равное произведению преобразований Лапласа распределений S и T.*

Эта теорема была получена еще в гл. III [см. формулу (III, 2; 29)], когда S и T имели ограниченные носители (и, значит, $b_1 = b_2 = -\infty$).

Вывод. *Если* $T \supset F(p)$, *то*

$$T^{(m)} \supset p^m F(p). \qquad \text{(VI, 2; 25)}$$

В самом деле, $T^{(m)} = T * \delta^{(m)}$ и $\delta^{(m)} \supset p^m$. Со сверткой $T * \delta^{(m)}$ надо соблюдать осторожность, если T — функция, то дифференцировать T надо в смысле теории распределений.

Примеры.

1) Имеем $Y(t) \supset \frac{1}{p}$. Тогда $Y' \supset p \cdot \frac{1}{p} = 1$, и действительно $Y' = \delta$, $\delta \supset 1$.

2) Вернемся к формулам (VI, 2; 13). Имеем

$$Y(t) \sin \omega t \supset \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Из этой формулы получаем

$$(Y(t) \sin \omega t)' = \omega Y(t) \cos \omega t \supset \frac{\omega p}{p^2 + \omega^2},$$

откуда

$$Y(t) \cos \omega t \supset \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Аналогично дифференцируя эту последнюю формулу, получаем

$$(Y(t) \cos \omega t)' = -\omega Y(t) \sin \omega t + \delta \supset \frac{p^2}{p^2 + \omega^2},$$

откуда вновь находим

$$Y(t) \sin \omega t \supset \frac{1}{\omega}\left[1 - \frac{p^2}{p^2 + \omega^2}\right] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Заметим дополнительно, что

$$(\delta'' + \omega^2 \delta) * Y(t) \frac{\sin \omega t}{\omega} = \delta \qquad \text{(VI, 2; 26)}$$

и в согласии с этим

$$(p^2 + \omega^2) \cdot \frac{1}{p^2 + \omega^2} = 1. \qquad \text{(VI, 2; 27)}$$

3) Тот факт, что δ является единицей для свертки, находится в связи с тем фактом, что 1 является единицей для умножения.

4) Известно, что

$$Y(t) e^{\lambda t} \frac{t^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} * Y(t) e^{\lambda t} \frac{t^{\beta - 1}}{\Gamma(\beta)} = Y(t) e^{\lambda t} \frac{t^{\alpha + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha + \beta)} \qquad \text{(VI, 2; 28)}$$

[см. формулу (III, 2; 11)].

Если сделать преобразование Лапласа и учесть последнюю из формул (VI, 2; 6), то получится соотношение

$$\left(\frac{1}{p-\lambda}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{p-\lambda}\right)^{\beta}=\left(\frac{1}{p-\lambda}\right)^{\alpha+\beta}, \qquad \text{(VI, 2; 29)}$$

которое на самом деле очевидно.

Ниже мы увидим, как, напротив, можно получить формулу (VI, 2; 28) из очевидного соотношения (VI, 2; 29).

4. Преобразования Фурье и Лапласа. Обращение преобразования Лапласа. Рассмотрим снова случай функции $f(t)$. Имеем

$$F(\xi+i\eta)=\int_0^{\infty}(f(t)\,e^{-\xi t})e^{-i\eta t}\,dt. \qquad \text{(VI, 2; 30)}$$

Мы видим, что при фиксированном ξ функция $F(\xi+i\eta)$, рассматриваемая как функция переменного η, является *преобразованием Фурье* функции $f(t)\,e^{-\xi t}$. Таким образом, преобразование Лапласа эквивалентно семейству преобразований Фурье, семейству образов Фурье функций $f(t)\,e^{-\xi t}$ при $\xi > a$. Из этого факта вытекает большое число следствий.

1) Он позволяет вычислять преобразования Фурье, отправляясь от преобразований Лапласа, которые легче поддаются вычислению, поскольку в них участвуют голоморфные функции.

Например, из формулы (VI, 2; 14) вытекает, что преобразованием Фурье функции

$$Y(t)\,J_0(t)\,e^{-\xi t}, \quad \xi>0, \qquad \text{(VI, 2; 31)}$$

служит функция

$$\frac{1}{\sqrt{\xi^2-\eta^2+2i\xi\eta+1}}. \qquad \text{(VI, 2; 32)}$$

Мы видим, что этот результат справедлив при $\xi > 0$, в то время как при доказательстве формулы (V, 2; 14) мы видели, что прямое вычисление дает этот результат только при $\xi > 1$; именно свойства голоморфных функций позволили нам перейти к $\xi > 0$. Можно было бы пойти дальше и переходом к пределу (в пространстве распределений) при $\xi \to 0$ получить отсюда преобразование Фурье умеренного распределения $Y(t)\,J_0(t)$.

2) *Если изображение по Лапласу функции $f(t)$ тождественно равно нулю при $\xi > a$, то функция $f(t)$ почти всюду равна нулю (равна нулю как распределение).*

В самом деле, если образ Фурье функции $f(t)\,e^{-\xi t}$ равен нулю, то сама эта функция равна нулю почти всюду, а значит, и $f(t)$ равна нулю почти всюду.

Отсюда вытекает, что голоморфная функция никогда не имеет более чем один оригинал.

Мы примем без доказательства, что этот результат остается справедливым для распределений: *если преобразование Лапласа $\mathcal{J}(p)$ распределения T равно нулю при $\xi > b$, то распределение T равно нулю.*

3) Из формулы обращения преобразования Фурье вытекает формула обращения преобразования Лапласа:

$$f(t)\,e^{-\xi t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi + i\eta)\,e^{i\eta t}\,d\eta. \qquad \text{(VI, 2; 33)}$$

Эта серия формул, соответствующих различным значениям $\xi > a$, должна давать одну и ту же функцию $f(t)$. Впрочем,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi + i\eta)\,e^{(\xi+i\eta)\,t}\,d\eta \qquad \text{(VI, 2; 34)}$$

или

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} F(p)\,e^{pt}\,dp. \qquad \text{(VI, 2; 35)}$$

Эта формула является основной; мы собираемся показать, при каком условии она справедлива.

Предложение 5. *Для того чтобы голоморфная функция $\mathcal{J}(p)$ была преобразованием Лапласа некоторого распределения $T \in \mathcal{D}'_+$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{J}(p)$ существовала в некоторой полуплоскости $\xi > c$ и мажорировалась по модулю в этой полуплоскости некоторым полиномом от $|p|$.*

1) Условие необходимо. Мы не собираемся это доказывать. Заметим только, что если T является функцией f, а число a — абсциссой суммируемости ее интеграла Лапласа, то функция $f(t)\,e^{-\xi t}$ суммируема при $\xi = c > a$, причем выполняется оценка

$$|F(p)| \leqslant \int_0^{\infty} |f(t)|\,e^{-ct}\,dt = C \qquad \text{(VI, 2; 36)}$$

при $\xi \geqslant c$. Функция $F(p)$ ограничена по модулю константой C.

Пусть теперь распределение T является производной (в смысле теории распределений) порядка m от некоторой функции f. Тогда

$$\mathcal{J}(p) = p^m F(p) \qquad \text{(VI, 2; 37)}$$

и, значит,

$$|\mathcal{J}(p)| \leqslant C\,|p|^m \quad \text{при} \quad \xi \geqslant c.$$

Заметим также, что производной $\delta^{(m)}$ соответствует функция p^m, подчиняющаяся оценке того же типа; впрочем, это — частный случай предыдущего, ибо $\delta^{(m)}$ является производной порядка $m+1$ от Y.

Заметим, наконец, что именно так и дается доказательство в общем случае; доказывают, что если распределение T имеет преобразование Лапласа, то T является производной $f^{(m)}$ от некоторой функции f, абсцисса суммируемости которой $< +\infty$.

2) Условие достаточно. Сначала мы рассмотрим частный случай; предположим, что модуль $|\mathcal{T}(p)|$ *ограничен* при $\xi > c > 0$ и что он стремится к 0 при $|p| \to \infty$, как $1/|p|^2$. Тогда произведение $|p|^2 |\mathcal{T}(p)|$ ограничено при $\xi > c$, т. е. существует такая постоянная C, что

$$|\mathcal{T}(p)| < \frac{C}{|p|^2} \quad \text{при} \quad \xi > c. \qquad \text{(VI, 2; 38)}$$

Это неравенство можно переписать в виде

$$|\mathcal{T}(\xi + i\eta)| < \frac{C}{\xi^2 + \eta^2} \quad \text{при } \xi > c. \qquad \text{(VI, 2; 39)}$$

Теперь мы можем вычислить интеграл (VI, 2; 35):

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} \mathcal{T}(p) e^{pt}\, dp, \quad \xi > c. \qquad \text{(VI, 2; 40)}$$

Этот интеграл имеет смысл при фиксированных ξ и t, ибо модуль $|e^{pt}| = |e^{(\xi + i\eta)t}| = e^{\xi t}$ не зависит от η, а функция $\mathcal{T}(\xi + i\eta)$ в силу оценки (VI, 2; 39) суммируема по η в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

Кроме того, этот интеграл не зависит от выбора ξ. В самом деле, если взять два значения ξ_1 и ξ_2, $\xi_1 > \xi_2$, то

$$\int_{\xi_1 - i\infty}^{\xi_1 + i\infty} - \int_{\xi_2 - i\infty}^{\xi_2 + i\infty} = \lim_{A\to\infty} \left(\int_{\xi_1 - iA}^{\xi_1 + iA} - \int_{\xi_2 - iA}^{\xi_2 + iA} \right) = \lim_{A\to\infty} \left(\int_{\xi_2 + iA}^{\xi_1 + iA} - \int_{\xi_2 - iA}^{\xi_1 - iA} \right) \text{(VI, 2; 41)}$$

(по теореме Коши; см. рис. VI, 2).

Но ведь последняя разность интегралов, стоящая в скобках, стремится к нулю, ибо каждый из этих двух интегралов подчиняется оценке

$$\int_{\xi_2 + iA}^{\xi_1 + iA} \frac{C\,|e^{pt}|}{|p|^2}\, d\xi < \frac{(\xi_1 - \xi_2)\, C e^{\xi_1 t}}{c^2 + A^2}, \qquad \text{(VI, 2; 42)}$$

правая часть которой стремится к 0 при $A \to \infty$.

Запишем равенство (VI, 2; 40) в виде

$$e^{-\xi t}f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{J}(\xi+i\eta)\,e^{i\eta t}\,d\eta. \qquad \text{(VI, 2; 43)}$$

Этот интеграл представляет собой преобразование Фурье $\overline{\mathcal{F}}$ (по η) от суммируемой функции $\mathcal{J}(\xi+i\eta)$. Поэтому возникающая функция $e^{-\xi t}f(t)$

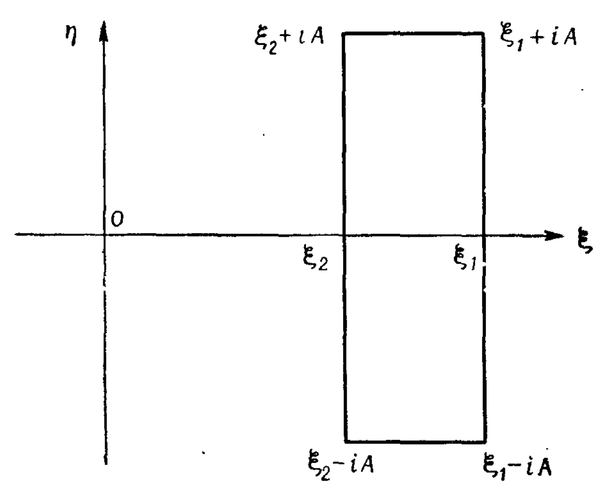


Рис. VI, 2.

непрерывна, значит, непрерывна и функция $f(t)$. Известно, что при этом функция $\mathcal{J}(\xi+i\eta)$ будет преобразованием Фурье $\mathcal{F}$ от функции $e^{-\xi t}f(t)$; соответствующую формулу надо понимать в смысле преобразования Фурье умеренных распределений. Однако если известно, что $f(t)\,e^{-\xi t}$ суммируема, то и в обычном смысле теории функций

$$\mathcal{J}(\xi+i\eta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-\xi t}e^{-i\eta t}\,dt \qquad \text{(VI, 2; 44)}$$

или

$$\mathcal{J}(p)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-pt}\,dt. \qquad \text{(VI, 2; 45)}$$

Покажем, что $f(t)$ равна нулю при $t < 0$ и что $f(t)e^{-\xi t}$ заведомо суммируема при $\xi > c$. Из равенства (VI, 2; 43) получаем оценку

$$|f(t)| \leqslant \frac{e^{\xi t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C}{c^2+\eta^2}\, d\eta \leqslant \frac{Ce^{\xi t}}{2c}, \qquad \text{(VI, 2; 46)}$$

которая справедлива при любом $\xi > c$. Если $t < 0$, то при $\xi \to \infty$ экспонента $e^{\xi t} = e^{-\xi |t|}$ стремится к 0 и, значит, $f(t)$ равна нулю. Если же $t > 0$, то минимум экспоненты $e^{\xi t}$ при $\xi > c$ равен e^{ct} и, значит,

$$|f(t)| < \frac{1}{2c} Ce^{ct}. \qquad \text{(VI, 2; 47)}$$

Таким образом, $|f(t)e^{-\xi t}| \leqslant \frac{1}{2c} Ce^{-(\xi - c)t}$, т. е. функция $f(t)e^{-\xi t}$ заведомо суммируема при $\xi > c$. Поэтому формула (VI, 2; 45) справедлива, а поскольку $f(t) = 0$ при $t < 0$, эта формула принимает вид

$$\mathcal{T}(p) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt \quad \text{при} \quad \xi > c. \qquad \text{(VI, 2; 48)}$$

Итак, функция $\mathcal{T}(p)$ действительно является преобразованием Лапласа при $\xi > c$. Кроме того, функция f непрерывна и удовлетворяет оценке (VI, 2; 47).

Вернемся теперь к общему случаю.

Пусть $\mathcal{T}(p)$ — функция, голоморфная при $\xi > c > 0$ и не превосходящая по модулю некоторого полинома от $|p|$ степени m. Тогда функция

$$\frac{\mathcal{T}(p)}{p^{m+2}} \qquad \text{(VI, 2; 49)}$$

будет удовлетворять оценке типа (VI, 2; 38). Поэтому существует непрерывная функция $f(t)$ (с абсциссой суммируемости $\leqslant c$), преобразованием Лапласа которой служит функция (VI, 2; 49). Но тогда, согласно выводу из предложения 4, распределение

$$T = \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+2} f \qquad \text{(VI, 2; 50)}$$

(где производные берутся в смысле теории распределений) будет иметь своим преобразованием Лапласа функцию $\mathcal{T}(p)$ при $\xi > c$. Что и требовалось доказать.

Пример. Пусть надо найти этим процессом оригинал функции $\mathcal{T}(p) = 1$. Эта функция, конечно, голоморфна при любом p и оценивается по модулю полиномом нулевой степени от $|p|$.

Выберем $c > 0$. Тогда функция $1/p^2$ при $\xi > c$ будет удовлетворять оценке (VI, 2; 38) с $C = 1$. Поэтому $1/p^2$ является преобразованием Лапласа некоторой непрерывной функции, обращающейся в нуль при $t < 0$. Эту функцию можно найти с помощью интеграла

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} \frac{1}{p^2} e^{pt} \, dp = \frac{1}{2i\pi} \lim_{A \to \infty} \int_{\xi - iA}^{\xi + iA}, \quad \text{где } \xi > c. \qquad \text{(VI, 2; 51)}$$

Ограничимся сразу же случаем $t \geqslant 0$, поскольку $f(t) = 0$ при $t < 0$. Заменим этот интеграл некоторым контурным интегралом. Присоединим к отрезку

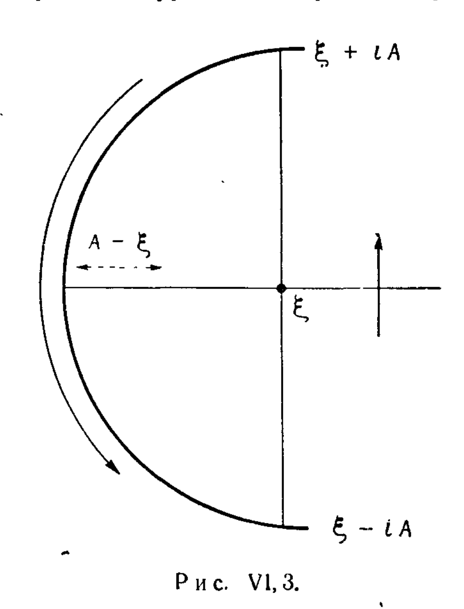


Рис. VI, 3.

$(\xi - iA, \xi + iA)$ полуокружность радиуса A с центром в точке ξ, расположенную слева от отрезка (см. рис. VI, 3). Ее длина равна πA. На этой полуокружности модуль $|e^{pt}/p^2|$ не превосходит $e^{\xi t}/(A - \xi)^2$, а интеграл по этой полуокружности не превосходит $\frac{\pi A e^{\xi t}}{(A - \xi)^2}$, и, значит, он стремится к 0 при $A \to \infty$. (Точка ξ фиксирована раз и навсегда.)

Таким образом, предел интеграла $\int\limits_{\xi-iA}^{\xi+iA}$ равен пределу интеграла по контуру Г, образованному отрезком и полуокружностью:

$$f(t)=\frac{1}{2i\pi}\lim_{A\to\infty}\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{pt}}{p^2}\,dp. \qquad \text{(VI, 2; 52)}$$

Этот интеграл равен вычету подинтегральной функции в точке $p=0$, умноженному на $2i\pi$. В окрестности точки $p=0$ справедливо разложение

$$\frac{e^{pt}}{p^2}=\frac{1}{p^2}+\frac{t}{p}+\frac{t^2}{2!}+\ldots. \qquad \text{(VI, 2; 53)}$$

Поэтому вычет функции e^{pt}/p^2 в точке $p=0$ равен t и $f(t)=t$ при $t>0$.

(Для того чтобы интеграл по полуокружности радиуса A с центром в точке ξ стремился к нулю при $t\leqslant 0$, эту полуокружность следует выбирать справа от прямой. Однако в этом случае внутри контура Г нет особенностей подинтегральной функции. Поэтому $f(t)=\frac{1}{2i\pi}\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_{\Gamma}=0$.)

Окончательно:

$$tY(t)\supset\frac{1}{p^2}\quad\text{при}\quad \xi>0. \qquad \text{(VI, 2; 54)}$$

Впрочем, эту формулу мы уже знаем.

Формула (VI, 2; 50) дает в качестве оригинала для $\mathcal{J}(p)=1$ производную

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2(Y(t)\,t)=\delta, \qquad \text{(VI, 2; 55)}$$

откуда получаем соответствие

$$\delta\supset 1,$$

которое согласуется с тем, что мы уже знаем.

Этот результат, конечно, нельзя было бы получить, используя непосредственно интеграл типа (VI, 2; 35), поскольку речь здесь идет не о функции $f(t)$, определенной при всех t, а о некотором распределении.

§ 3. Приложения преобразования Лапласа. Символическое исчисление

Существуют многочисленные таблицы оригиналов и изображений по Лапласу. Использование этих таблиц в ту или другую сторону позволяет решать многие задачи благодаря превращению свертки в умножение. Совокупность этих операций носит название *символического исчисления*.

Приведем некоторые примеры.

1) Пусть надо вычислить свертку

$$f = Y(t) J_0(t) * Y(t) J_0(t).$$

Имеем $Y(t) J_0(t) \supset 1/\sqrt{p^2+1}$ [формула (VI, 2; 14)].

Поэтому изображением f является функция $\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{1}{p^2+1}$, а f, стало быть, служит ее оригиналом. Поэтому $f(t) = Y(t) \sin t$ [формула (VI, 2; 13)].

Итак,

$$Y(t) J_0(t) * Y(t) J_0(t) = Y(t) \sin t, \qquad \text{(VI, 3; 1)}$$

или, при $t > 0$,

$$\int_0^t J_0(\tau) J_0(t-\tau)\, d\tau = \sin t. \qquad \text{(VI, 3; 2)}$$

При $t < 0$ это рассуждение не дает ничего интересного, поскольку все рассматриваемые функциии равны нулю. Однако формула (VI, 3; 2) остается справедливой и при $t \leqslant 0$; чтобы убедиться в этом, достаточно сделать замену переменного $\tau = -\theta$ и использовать четность функции J_0 и нечетность синуса.

2) Пусть надо решить некоторое уравнение в свертках:

$$A * X = B, \quad A \in \mathcal{D}'_+, \quad B \in \mathcal{D}'_+, \qquad \text{(VI, 3; 3)}$$

где A — известный коэффициент, B — данная правая часть, а X — неизвестное.

(Известно, что к этому типу уравнений относятся дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и многие интегральные или интегродифференциальные уравнения; электрические цепи дают многочисленные примеры уравнений в свертках.)

Предположим, что распределения A и B имеют изображения по Лапласу $\mathcal{A}(p)$ и $\mathcal{B}(p)$. Если в алгебре $\mathcal{D}'_+$ существует решение и если оно имеет изображение по Лапласу $\mathcal{X}(p)$, то

$$\mathcal{A}(p)\mathcal{X}(p) = \mathcal{B}(p), \qquad \text{(VI, 3; 4)}$$

откуда

$$\mathcal{X}(p) = \frac{\mathcal{B}(p)}{\mathcal{A}(p)}. \qquad \text{(VI, 3; 5)}$$

Чтобы получить X, остается найти оригинал функции $\mathcal{B}(p)/\mathcal{A}(p)$. Если хотя бы одно из двух распределений A или B не имеет изображения по

Лапласу (т. е. абсцисса определения $= +\infty$[1])), то этот метод не применим. Если оба они имеют изображения, но частное $\mathcal{B}(p)/\mathcal{A}(p)$ не является преобразованием Лапласа, то этот метод ничего более не дает. Он показывает только, что не существует решения X, которое имело бы изображение по Лапласу, однако может существовать решение, не имеющее изображения по Лапласу (абсцисса определения $= +\infty$).

Если же, наконец, оба распределения A и B имеют изображения по Лапласу и если частное $\mathcal{B}(p)/\mathcal{A}(p)$ имеет оригинал X, то этот оригинал X является решением, и притом единственным, поскольку известно, что уравнение в свертках в алгебре $\mathcal{D}'_+$ никогда не имеет *более одного* решения (см. гл. III, § 2, п. 3).

В частности, если распределение A имеет изображение, то элементарное решение, т. е. элемент A^{-1}, обратный элементу A в сверточной алгебре $\mathcal{D}'_+$, является оригиналом для функции $1/\mathcal{A}(p)$.

Например, пусть надо найти A^{-1} для $A = Y(t)J_0(t)$. Здесь $\mathcal{A}(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$ [см. формулу (VI, 2; 14)] и, значит,

$$\frac{1}{\mathcal{A}(p)} = \sqrt{p^2+1}. \tag{VI, 3; 6}$$

Эта функция голоморфна при $\xi > 0$ и мажорируется по модулю полиномом от $|p|$ степени 1. Поэтому она является преобразованием Лапласа. Ее оригинал находится сразу же, ибо

$$\sqrt{p^2+1} = \frac{p^2+1}{\sqrt{p^2+1}},$$

откуда

$$E = \left(\frac{d^2}{dt^2} + 1\right) Y(t) J_0(t), \tag{VI, 3; 7}$$

или

$$E = (\delta'' + \delta) * Y(t) J_0(t).$$

Впрочем, равенство $E * Y(t) J_0(t) = \delta$ легко проверить. Оно переписывается в виде

$$(\delta'' + \delta) * Y(t) J_0(t) * Y(t) J_0(t) = \delta$$

и затем, если учесть соотношение (VI, 3; 1), в виде

$$(\delta'' + \delta) * Y(t) \sin t = \delta.$$

---

[1]) Под абсциссой определения автор понимает, по-видимому, минимальное число a, такое, что при $\xi > a$ распределение $e^{-\xi t}T$ принадлежит $\mathcal{S}'$. Преобразование Лапласа $\mathcal{T}(p)$ *определено* при $\xi > a$. — *Прим. перев.*

Последняя формула хорошо известна. Из дифференциального уравнения для J_0 с обычными производными

$$J_0'' + \frac{1}{t} J_0' + J_0 = 0 \qquad \text{(VI, 3; 8)}$$

получаем

$$J_0'' + J_0 = -\frac{1}{t} J_0'(t) = \frac{J_1(t)}{t} \qquad \text{(VI, 3; 9)}$$

(эта функция регулярна в начале координат, ибо J_1 содержит t в качестве множителя).

Но в окрестности точки $t = 0$

$$J_0(t) = 1 - \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \ldots,$$

поэтому

$$(Y(t) J_0(t))'' = Y(t) J_0''(t) + \delta',$$

откуда

$$E = \left(\frac{d^2}{dt^2} + 1\right) Y(t) J_0(t) = Y(t) \frac{J_1(t)}{t} + \delta'. \qquad \text{(VI, 3; 10)}$$

Вместо того чтобы проделывать эту выкладку, следовало бы найти этот результат в таблицах. К несчастью, большинство таблиц содержит оригиналы, которые являются функциями, и не содержит оригиналов, которые являлись бы распределениями.

Из соотношений $E * Y(t) J_0(t) = \delta$ и (VI, 3; 10) получаем равенство

$$Y(t) J_0(t) * \left[Y(t) \frac{J_1(t)}{t} + \delta'\right] = \delta. \qquad \text{(VI, 3; 11)}$$

Это равенство записывается в виде

$$\left(Y(t) J_0(t) * Y(t) \frac{J_1(t)}{t}\right) + Y(t) J_0'(t) + \delta = \delta \qquad \text{(VI, 3; 12)}$$

и затем, если учесть, что $J_0' = -J_1$, в виде

$$Y(t) J_0(t) * Y(t) \frac{J_1(t)}{t} = Y(t) J_1(t). \qquad \text{(VI, 3; 13)}$$

Эту формулу можно легко проверить с помощью таблиц, ибо

$$\left.\begin{aligned} Y(t) J_0(t) &\supset \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}, \\ Y(t) \frac{J_1(t)}{t} &\supset \sqrt{p^2+1} - p, \\ Y(t) J_1(t) &\supset \frac{\sqrt{p^2+1} - p}{\sqrt{p^2+1}}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI, 3; 14)}$$

При $t \geqslant 0$ она приводит к равенству

$$\int_0^t \frac{J_1(\tau)}{\tau} J_0(t-\tau)\,d\tau = J_1(t) \qquad \text{(VI, 3; 15)}$$

(которое, как показывает замена переменных $\tau = -\theta$, справедливо и при $t < 0$).

Формула (VI, 3; 10) позволяет решить интегральное уравнение

$$\int_0^t f(\tau) J_0(t-\tau)\,d\tau = g(t), \quad t \geqslant 0 \qquad \text{(VI, 3; 16)}$$

(где g — данная правая часть, f — неизвестное решение). Решением служит

$$f(t) = \int_0^t g(\tau)\frac{J_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau + g'(t) \qquad \text{(VI, 3; 17)}$$

при условии, что g' является функцией. Если g' — распределение, то и решение будет не функцией, а распределением.

Мы видим, что потеря члена δ' в формуле (VI, 3; 10) привела бы к грубым ошибкам. Приведенные формулы показывают, насколько преобразование Лапласа полезно в различных задачах со свертками в алгебре $\mathcal{D}'_+$.

Важное замечание. В таблицах преобразований Лапласа неявно подразумевается, что функции $f(t)$ равны нулю при $t < 0$. Значения этих функций приводятся только при $t > 0$, а множитель $Y(t)$ не пишется. Это обстоятельство может привести к серьезным ошибкам, если не обращать на него внимания.

Например, в таблицах преобразований Лапласа приводится соотношение

$$1 \supset \frac{1}{p}, \qquad \text{(VI, 3; 18)}$$

которое после дифференцирования дает абсурдный результат

$$0 \supset 1. \qquad \text{(VI, 3; 19)}$$

В действительности равенство (VI, 3; 18) означает, что

$$Y(t) \supset \frac{1}{p}, \qquad \text{(VI, 3; 20)}$$

что при дифференцировании дает правильный результат

$$\delta \supset 1. \qquad \text{(VI, 3; 21)}$$

Упражнение. Пусть надо вычислить оригинал функции $1/(p^2+1)^{\nu+\frac{1}{2}}$, $\operatorname{Re} p > 0$, $\nu > -\frac{1}{2}$, а именно оригинал той ее непрерывной ветви, которая принимает вещественные положительные значения при вещественных положительных p. (Экзаменационные испытания, июнь, 1955.)

Известно, что

$$Y(t)\,e^{it}\,\frac{t^{\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \supset \left(\frac{1}{p-i}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} \tag{VI, 3; 22}$$

и

$$Y(t)\,e^{-it}\,\frac{t^{\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \supset \left(\frac{1}{p+i}\right)^{\nu+\frac{1}{2}}. \tag{VI, 3; 23}$$

Поэтому искомый оригинал $H_\nu(t)$ является сверткой

$$H_\nu(t) = Y(t)\,e^{it}\,\frac{t^{\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} * Y(t)\,e^{-it}\,\frac{t^{\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}, \tag{VI, 3; 24}$$

или

$$H_\nu(t) = \frac{Y(t)}{\left(\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right)^2} \int_0^t e^{i(t-\tau)} e^{-i\tau} (t-\tau)^{\nu-\frac{1}{2}} \tau^{\nu-\frac{1}{2}}\, d\tau. \tag{VI, 3; 25}$$

Положим $\tau = tu$, тогда

$$H_\nu(t) = \frac{Y(t)\,e^{it} t^{2\nu}}{\left(\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right)^2} \int_0^1 e^{-2itu} \left((1-u)\,u\right)^{\nu-\frac{1}{2}} du. \tag{VI, 3; 26}$$

Этот интеграл напоминает интеграл, дающий функции Бесселя:

$$J_\nu(t) = \frac{(t/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 e^{-itv} (1-v^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dv. \tag{VI, 3; 27}$$

Чтобы перейти от $u(1-u)$ к $1-v^2$, достаточно положить $u=(v+1)/2$. Тогда

$$H_\nu(t) = \frac{Y(t)\,e^{it} t^{2\nu}}{\left(\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right)^2} \int_{-1}^1 e^{-it(1+v)} \left(\frac{1-v^2}{4}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \frac{dv}{2}, \tag{VI, 3; 28}$$

т. е.

$$H_\nu(t) = Y(t)\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{t}{2}\right)^\nu J_\nu(t) \supset \left(\frac{1}{p^2+1}\right)^{\nu+\frac{1}{2}}. \qquad \text{(VI, 3; 29)}$$

Замечания. 1) При $\nu = 0$ снова получаем соотношение

$$Y(t) J_0(t) \supset \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}. \qquad \text{(VI, 3; 30)}$$

2) При $\nu = \frac{1}{2}$ известно, что оригиналом для $\frac{1}{p^2+1}$ служит $Y(t)\sin t$. [Формула (VI, 2; 13).] Это согласуется с формулой

$$J_{\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin t.$$

3) Когда ν стремится к $-\frac{1}{2}$, функция $\left(\frac{1}{p^2+1}\right)^{\nu+\frac{1}{2}}$ стремится к 1, оставаясь равномерно ограниченной при $\mathcal{R}e\, p \geqslant \varepsilon > 0$.

Было бы легко получить отсюда со всей строгостью, что $H_\nu(t)$ стремится к δ. Покажем это непосредственно.

Известно, что функция $J_\nu(t)$ остается ограниченной при $0 < \eta \leqslant t \leqslant A < \infty$, а поскольку $\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) \to \infty$, отсюда вытекает, что $H_\nu(t)$ равномерно стремится к 0 при $0 < \eta \leqslant t < A < \infty$, когда $\nu \to -\frac{1}{2}$.

Кроме того, при достаточно малом η функция $J_\nu(t)$ остается неотрицательной в интервале $0 \leqslant t \leqslant \eta$. Поэтому достаточно показать, что

$$\int_0^\eta H_\nu(t)\,dt \to 1, \quad \text{когда} \quad \nu \to -\frac{1}{2}. \qquad \text{(VI, 3; 31)}$$

Пользуясь разложением функции $J_\nu(t)$ в ряд, можно написать для нее в интервале $(0, \eta)$ равенство

$$J_\nu(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + \varepsilon(\nu, t), \qquad \text{(VI, 3; 32)}$$

где $|\varepsilon(t, \nu)| \leqslant kt^{\nu+1}$.

Тогда интеграл $\int_0^\eta t^\nu \varepsilon(t, \nu)\,dt$ остается ограниченным при $\nu \to -\frac{1}{2}$, а поскольку $\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) \to \infty$, соответствующий член в интеграле от $H_\nu(t)$

стремится к нулю. Таким образом, остается предел

$$\lim_{\nu\to-\frac{1}{2}} \int_0^{\eta} H_\nu(t)\,dt = \lim_{\nu\to-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu+1)} \int_0^{\eta} \left(\frac{t}{2}\right)^{2\nu} dt. \qquad \text{(VI, 3; 33)}$$

Но

$$\Gamma(\nu+1) \to \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\int_0^{\eta} \left(\frac{t}{2}\right)^{2\nu} dt = \frac{\eta^{2\nu+1}}{2^{2\nu}(2\nu+1)} \sim \frac{1}{\nu+\frac{1}{2}}$$

и

$$\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) \sim \frac{1}{\nu+\frac{1}{2}}.$$

Окончательно получаем

$$\lim_{\nu\to-\frac{1}{2}} \int_0^{\eta} H_\nu(t)\,dt = 1. \qquad \text{(VI, 3; 34)}$$

Ч. и т. д.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VI

Упражнение VI-1. Пусть a и b — два положительных числа. Пусть $F(p)$ — изображение по Лапласу некоторой функции $f(t)$. Каково изображение по Лапласу функции

$$g(t) = \begin{cases} f(at-b) & \text{при} \quad t > b/a, \\ 0 & \text{при} \quad t < b/a. \end{cases}$$

Упражнение VI-2. Пусть функция $f(t)$ имеет изображением по Лапласу функцию $F(p)$. Каковы изображения по Лапласу функций

$$e^t f(t); \qquad \int_0^{\infty} \frac{\cos(2\sqrt{tx})}{\sqrt{\pi t}} f(x)\,dx;$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(2\sqrt{tx})}{\sqrt{\pi x}} f(x)\,dx; \qquad \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(2\sqrt{tx})}{\sqrt{\pi t}} f(x)\,dx$$

и

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}(2\sqrt{tx})}{\sqrt{\pi x}} f(x)\,dx.$$

Упражнение VI-3. Выразить через изображение по Лапласу $F(p)$ функции $f(t)$ изображения по Лапласу следующих функций:

$$\int_0^\infty J_0(2\sqrt{tx}) f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_0^t J_0(2\sqrt{(t-x)x}) f(x)\,dx,$$

где J_0 — функция Бесселя порядка 0.

Упражнение VI-4. Пусть функция $f(t)$ равна нулю при $t < 0$ и периодична с периодом T при $t > 0$. Показать, что ее изображение по Лапласу дается формулой

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Применение. Найти изображение по Лапласу функции, равной нулю при $t < 0$ и равной $|\sin t|$ при $t > 0$.

Упражнение VI-5. Пусть $f(t)$ — функция, равная нулю при $t < 0$ и имеющая изображение по Лапласу $F(p)$.

1°. Каковы изображения по Лапласу функций

$$f\left(\frac{t}{a}\right), \quad a > 0; \quad f(t) + 1.$$

2°. Положим

$$f_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < 0, \\ n & \text{при} \quad n < t < n+1; \quad n \text{ целое} \geqslant 0. \end{cases}$$

Вычислить непосредственно преобразование Лапласа $F_0(t)$ функции $f_0(t)$. Получить отсюда изображения функций $f_0(t/a)$ и $f_0(t) + 1$.

3°. Вычислить свертки

$$\delta' * f_0(t); \quad \delta' * f_0(t/a); \quad \delta' * (f_0(t) + 1).$$

Выразить в каждом из этих случаев изображение свертки через соответственно изображения $F_0(p)$, $F_1(p)$ и $F_2(p)$ функций $f_0(t)$, $f_0(t/a)$ и $f_0(t) + 1$. Получить снова результаты п. 2°.

Упражнение VI-6. Пусть $a > 0$. Пусть функция $f(t)$ равна нулю при $t < 0$, а при $t > 0$ равна

$$\begin{cases} \frac{t}{a} - 4n, & \text{когда } 4na < t < (4n+1)a, \\ -\frac{t}{a} + 4n + 2, & \text{когда } (4n+1)a < t < (4n+2)a, \\ 0, & \text{когда } (4n+2)a < t < (4n+4)a; \end{cases}$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots .$$

1°. Найти непосредственно изображение по Лапласу $F(p)$ функции $f(t)$.

2°. Вычислить $\delta'' * f(t)$.

3°. Выразить изображение свертки через $F(p)$. Получить снова значение $F(p)$, найденное в п. 2°.

Упражнение VI-7. Вычислить изображение по Лапласу функции $f(t)$, равной нулю при $t < 0$, а при $t > 0$ равной

$$2^n - 1, \quad \text{когда} \quad n < t < n+1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Найти распределение $X \in \mathscr{D}'_+$, которое служит решением уравнения

$$X * f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \delta_{(n)}.$$

Упражнение VI-8. Решить в алгебре $\mathscr{D}'_+$ систему уравнений в свертках

$$Y(x)e^{-x} * X_1 + Y(x)J_0(x) * X_2 = -Y(x)(\sin x + \cos x) + \delta,$$
$$Y(x)J_0(x) * X_1 + X_2 = 2Y(x)e^{-x} + \delta' - 2\delta.$$

Упражнение VI-9. Условимся раз и навсегда, что все функции от t, участвующие в этой задаче, равны нулю при $t < 0$.

I. Функцией с периодическими итерациями порядка 2 называется функция $\psi(p)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\psi[\psi(p)] = p \text{ при любом } p. \tag{1}$$

a) Дать примеры подобных функций.

b) Пусть $f(p)$ — одно из решений уравнения (1). Показать, что функция $\varphi^{-1}\{f[\varphi(p)]\}$ также будет решением при любой обратимой функции φ с обратной φ^{-1}.

II. Рассмотрим интегральное уравнение

$$f(t) + \lambda \int_0^{\infty} K(t, x) f(x)\, dx = g(t), \tag{2}$$

где $f(t)$ — неизвестная функция, а ядро K разлагается в ряд

$$K(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n a(t) * b^n(t),$$

где $b^n(t)$ определяется равенством

$$b^n(t) = b^{n-1}(t) * b(t).$$

Ряд, определяющий $K(x, t)$, равномерно сходится при всех значениях x и t на полупрямой $[0, \infty]$.

a) Показать, что преобразование Лапласа сводит решение уравнения (2) к решению функционального уравнения, имеющего вид

$$\varphi(p) + \lambda\rho(p)\varphi[\psi(p)] = \theta(p), \tag{3}$$

с неизвестной функцией $\varphi(p)$.

b) Решить уравнение (3), когда $\psi(p)$ имеет периодические операции порядка 2. [Можно показать, что этот случай будет иметь место, когда $K(t, x) = x^{-\frac{\nu}{2}} t^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{tx})$ с $\operatorname{Re}\nu > -1$, когда $K(t, x) = \frac{\cos 2\sqrt{tx}}{\sqrt{t}}$ и когда $K(t, x) = \frac{\sin 2\sqrt{tx}}{\sqrt{x}}$.]

c) Пользуясь этим, привести решение уравнения (2) к виду

$$f(t) = h(t) * \left(g(t) - \lambda \int_0^\infty K(t, x) g(x)\, dx\right),$$

где функция $h(t)$ удовлетворяет уравнению

$$Y(t)h(t) - 2Y(t)h(t) * \int_0^\infty Y(t)K(t, x)a(x)\, dx = \delta.$$

III. Решить уравнение

$$f(t) + \lambda \int_0^\infty t^{\frac{\nu}{2}} x^{-\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{tx}) f(x)\, dx = g(t)$$

a) при $\lambda^2 \neq 1$,
b) при $\lambda = 1$.

[Можно показать, что общее решение функционального уравнения $f(s) = \frac{1}{s^n} f\left(\frac{1}{s}\right)$ имеет вид $f(s) = h(s) + \frac{1}{s^n} h\left(\frac{1}{s}\right)$, где h — произвольная функция. Отсюда можно найти вид, который должна иметь функция $g(t)$ для того, чтобы уравнение (2) имело в этом случае решение, и вид этого решения.]

c) При $\lambda = -1$.

IV. a) Показать, что если функция $\rho(p)$ из уравнения (3) удовлетворяет соотношению

$$\rho(p)\rho[\psi(p)] = 1, \tag{4}$$

то ядро $K(t, x)$ является обратным самому себе, т. е. равенство

$$h(t) = \int_0^\infty K(t, x) k(x) dx$$

эквивалентно равенству

$$k(t) = \int_0^\infty K(t, x) h(x) dx.$$

b) Показать, что в этом случае значения $\lambda = \pm 1$ являются собственными для уравнения (2).

c) При $\lambda = +1$ уравнение (2) имеет решение, только если функция $\theta(p)$ служит решением некоторого уравнения (которое можно преобразовать в уравнение относительно $g(t)$). Получить отсюда решения уравнения (2) в этом случае.

Упражнение VI-10. (Париж, 1958.) I. Пусть функция Γ определена бесконечным произведением

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}\right], \tag{1}$$

где γ — постоянная Эйлера, равная пределу $\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m} - \lg m\right)$. Предлагается получить формулу Стирлинга при помощи преобразования Лапласа. Положим

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Используя произведение (1), разложить функции $\psi(z)$ и $\psi'(z)$ в ряды; вычислить $\psi(m)$ при целом $m \geqslant 1$ и предел $\lim_{m \to \infty} (\psi(m) - \lg m)$.

Первый вопрос.

Вспомнить, без доказательства, изображение по Лапласу функции $Y(t)\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, $\alpha > 0$, где $Y(t)$ — функция Хевисайда. Пусть $f(t)$ — функция, которая равна нулю при $t < 0$, непрерывна и ограничена при $t > 0$ и имеет в окрестности точки $t = 0$ асимптотическое разложение

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots \qquad (2)$$

при $t > 0$. [Под этим понимают, что разность $f(t) - a_0 - a_1 t - \ldots - a_{k-1} t^{k-1}$ при положительных и достаточно малых t мажорируется по модулю величиной $A_k t^k$ с подходящим $A_k > 0$; здесь $k \geqslant 1$.] Показать, что ее изображение по Лапласу $F(p)$ имеет асимптотическое разложение по степеням $1/p$

$$F(p) = \frac{b_0}{p} + \frac{b_1}{p^2} + \ldots \qquad (3)$$

при вещественном $p \to \infty$, и определить коэффициенты этого разложения.

Рассмотреть, в частности, функцию

$$f(t) = Y(t)\left[\frac{1}{t(e^t - 1)} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2t}\right]. \qquad (4)$$

Показать, что она имеет асимптотическое разложение типа (2). Вычислить a_0 и a_1 и получить отсюда коэффициенты b_0 и b_1 разложения типа (3) для $F(p)$.

Второй вопрос.

Пусть $g(t)$ — функция, имеющая изображением по Лапласу функцию $G(p)$. Каково изображение по Лапласу функции $(e^t - 1)g(t)$?

Рассмотреть, в частности, функцию

$$g(t) = Y(t)\frac{t}{e^t - 1}. \qquad (5)$$

Показать, что $G(p)$ удовлетворяет простому функциональному уравнению. Используя это уравнение и поведение $G(p)$ на бесконечности, вычислить $G(p)$, выразив ее через ψ'. Рассмотреть, наконец, функцию $f(t)$, определенную равенством (4).

Пользуясь изображением по Лапласу функции $t^2 f(t)$ и тем, что $F'(p) \to 0$, когда p стремится к бесконечности по вещественной оси, вычислить функцию $F(p)$ с точностью до аддитивной постоянной.

Третий вопрос.

Показать, что результаты второго пункта и асимптотическое разложение (3) позволяют получить (при вещественном $p \to \infty$) формулу Стирлинга типа

$$p! = p^p e^{-p} \sqrt{p}\, C\left(1 + \frac{C_0}{p} + \frac{C_1}{p^2} + \ldots\right), \tag{6}$$

где C — неизвестная постоянная, а стоящий в скобках ряд — асимптотическое разложение по степеням $1/p$. Вычислить C_0 и C_1.

II. Все величины в приведенных выше формулах уже известны, за исключением постоянной $\sqrt{2\pi}$ в формуле Стирлинга.

Найти изображение по Фурье функции

$$Y(x)\, e^{-2\pi x} \frac{x^{(\alpha-1)/2}}{\Gamma((\alpha+1)/2)}. \tag{7}$$

Написать формулу Парсеваля и независимо вычислить в ней правую и левую части. $\left[\text{При вычислении интеграла } \int\limits_0^\infty \frac{du}{(1+u^2)^\beta} \text{ положить } u = \sqrt{\frac{v}{1-v}}.\right]$ Вывести отсюда замечательное соотношение между $\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$ и $\Gamma(\alpha)$. (Формула Лежандра — Гаусса.)

Показать, что если формула Стирлинга известна без постоянной $\sqrt{2\pi}$, то формула Лежандра — Гаусса позволяет найти эту постоянную.

ГЛАВА VII

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ И УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

§ 1. Уравнение колебаний струны

Поперечные колебания натянутой струны

1. Физические задачи, подчиняющиеся уравнению колебаний струны. Мы хотим изучить малые *поперечные* колебания однородной натянутой струны AB, имеющей длину L и постоянное поперечное сечение σ_0. Направим ось $\overrightarrow{Ox}$ по $\overrightarrow{AB}$, точку O поместим в точку A. Точка струны с абсциссой x $(0 \leqslant x \leqslant L)$ может смещаться перпендикулярно к струне, с течением времени ее координаты y и z будут колебаться около значения 0.

Обозначим буквой $\vec{u}$ вектор в плоскости yOz с координатами y, z. Тогда $\vec{u}$ будет вектор-функцией времени t, колеблющейся около $\vec{0}$. Но эта функция, которая определяет смещение точки с абсциссой x, является также функцией x; итак, $\vec{u}$ является вектор-функцией $\vec{u}(x, t)$ переменных x и t, которую мы собираемся определить.

Пусть T — натяжение струны в точке M с абсциссой x в момент времени t.

Мы разумеем под этим, что силы, с которыми участок струны MB действует на участок AM, можно заменить единственной силой величины T, приложенной к точке M и направленной по ориентированной касательной к дуге $\widehat{MB}$.

Согласно принципу действия и противодействия, участок струны AM действует на участок MB с силой, в точности противоположной предыдущей силе. Мы видим, что натяжение T остается близким к некоторому среднему натяжению T_0, не зависящему от x и t, поскольку деформации струны мы считаем малыми по сравнению с ее длиной.

Действием тяжести на струну мы пренебрегаем; к тому же мы не накладываем никаких условий на положение равновесия струны по отношению к вертикали; если хотят принять это во внимание, то ищут положение равно-

весия струны в поле тяготения (или в любом другом заданном неизменном поле), положение, близкое к отрезку прямой, если струна мало деформируема и сильно натянута; функция $\vec{u}$ будет тогда смещением, поперечным к *этому положению равновесия*.

Обозначим через ρ *линейную плотность* струны в точке x в момент времени t, т. е. массу струны, приходящуюся на единицу длины, иначе говоря, предел отношения $\Delta m/\Delta x$ при $\Delta x \to 0$, где Δm — масса участка струны $(x, x + \Delta x)$. Поскольку деформации струны мы считаем малыми, плотность ρ остается близкой к некоторой величине ρ_0, зависящей только от x. Но поскольку мы предположили, что струна *однородна*, величина ρ_0 не зависит и от x. Впрочем, практически легко реализовать случай, когда ρ_0 непрерывно изменяется вместе с x, ибо $\rho_0 = \sigma_0 \omega_0$, где ω_0 — обычная плотность (масса на единицу объема), а σ_0 — поперечное сечение струны в точке x (предполагаемое малым); струна, изготовленная из однородного вещества, но с переменным поперечным сечением σ_0, будет обладать линейной плотностью ρ_0, изменяющейся вместе с x.

Уравнение, которому должна удовлетворять функция $\vec{u}(x,t)$, получится, если для каждого элементарного участка струны (MM'), $(x, x + \Delta x)$ написать основное уравнение движения $\vec{F} = m\vec{\gamma}$. Если стремиться к полной строгости, то для каждого участка струны (x_1, x_2) следует приравнять результирующую системы сил $\vec{F}$ результирующей системы векторов $m\vec{\gamma}$, а пару системы сил $\vec{F}$ — паре системы векторов $m\vec{\gamma}$. При этом вместо элементарных величин, пропорциональных Δx, возникли бы интегралы по dx.

Мы будем придерживаться элементарного метода, скорее интуитивного, чем строгого. Можно проверить, что равенство пар выполняется автоматически, в силу предположения, что натяжение струны направлено по касательной к струне. Мы будем пренебрегать всеми величинами порядка $(\Delta x)^2$ по сравнению с Δx, поскольку Δx бесконечно мало.

Мы предположим, что смещения струны малы. Уточним, что это означает. Если не сделать предположения этого рода, то возникающее дифференциальное уравнение оказывается очень сложным (в частности, оно оказывается нелинейным). Если же ограничиться только некоторым приближением к этому уравнению, т. е. если искать только приближенные решения поставленной физической задачи, то членами вида $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$, $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и т. п. можно пренебречь, поскольку они „второго порядка малости" по сравнению с членами „первого порядка", такими, как $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. При этом возникает уравнение (VII, 1; 8), которое легко поддается исследованию.

Чем меньше величины $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, тем меньше допущенная при этом относительная погрешность. Впрочем, можно оценить погрешность (например, погрешность в вычислении частот), которую мы совершаем при замене точного уравнения приближенным уравнением (VII, 1; 8). Например, для скрипичной струны можно установить, является ли такая погрешность приемлемой при обычных амплитудах колебания этой струны; если погрешность неприемлема, то необходимо вычислить поправочный член. Это та же самая ситуация, что и в случае колебаний маятника. Точное уравнение колебаний маятника имеет вид $\theta'' + (g/l)\sin\theta = 0$. При малых колебаниях вблизи положения равновесия $\theta = 0$ это уравнение можно заменить уравнением $\theta'' + (g/l)\theta = 0$, которое приводит к периоду колебаний T_0, равному $2\pi\sqrt{l/g}$.

Этот период является не чем иным, как пределом истинного периода колебаний, когда амплитуда колебаний α стремится к нулю. Чем меньше амплитуда α данных колебаний, тем меньше будет относительная погрешность, возникающая при замене истинного периода T периодом T_0. Если эта погрешность неприемлема, то нужно добавить поправочный член; известно, что этот член равен $T_0\frac{\alpha^2}{16}$. Может оказаться, что и эта поправка неудовлетворительна; истинный период T является трансцендентной функцией от α, выражающейся через эллиптический интеграл:

$$T = \sqrt{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}.$$

В задаче о колебаниях струны положение вещей еще более сложное, поэтому мы ограничимся случаем бесконечно малых колебаний. Величины, которые должны быть малы, суть $\frac{\partial u}{\partial x}$ (безразмерная величина, дающая наклон струны) и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (величина размерности l^{-1}). При этих условиях можно сделать следующие заключения:

1) Вектор $m\vec{\gamma}$ лежит в плоскости yOz и равен

$$m\vec{\gamma} = \rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}\Delta x \qquad \text{(VII, 1; 1)}$$

(действительно, масса рассматриваемого элемента струны неизменна при движении и равна $\rho_0\Delta x$ в состоянии равновесия).

2) Сила, с которой участок струны $M'B$ действует на точку M', равна $T(x+\Delta x)$; ее составляющая по оси Ox равна $T(x+\Delta x)\cos\alpha$, а ее составляющая в плоскости yOz равна $T\vec{\theta}$, где $\vec{\theta}$ — компонента в плоскости yOz

единичного вектора касательной к струне в точке M', ориентированной в направлении AB. Сила, с которой участок струны AM действует на точку M, записывается аналогично с заменой абсциссы $x+\Delta x$ на x и с изменением направления касательной на противоположное.

Если пренебречь членами $(\Delta x)^2$, то сумму этих двух сил можно записать так:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(T\cos\alpha\right)\Delta x \text{ — составляющая по оси } Ox,\\ &\frac{\partial}{\partial x}\left(T\vec{\theta}\right)\Delta x \text{ — составляющая в плоскости } yOz. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII, 1; 2)}$$

Основное уравнение движения в проекции на оси Ox приводит к равенству

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\cos\alpha\right)=0. \qquad \text{(VII, 1; 3)}$$

Если пренебречь разностью $\cos\alpha-1$ и ее производной по x, которые являются бесконечно малыми второго порядка, то это равенство сведется к равенству

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0. \qquad \text{(VII, 1; 4)}$$

Если учесть, что T считается близким к T_0, то последнее равенство возможно только благодаря нашему предположению, что $\frac{\partial T_0}{\partial x}=0$, т. е. что T_0 не зависит от x.

Таким образом, в любой момент времени t натяжение струны должно быть одним и тем же по всей ее длине; следовательно, оно должно быть некоторой функцией $T(t)$ времени t, колеблющейся около T_0. Без дополнительных механических предположений эту функцию вычислить нельзя; ниже мы увидим [см. (VII, 1; 25)], что следует положить

$$T=T_0, \qquad \text{(VII, 1; 5)}$$

для того чтобы избежать продольных колебаний.

Уравнение движения в проекции на плоскость yOz приводит к уравнению

$$\rho_0\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}(T\vec{\theta}). \qquad \text{(VII, 1; 6)}$$

Координаты вектора $\vec{\theta}$ по осям Oy и Oz равны $\frac{dy}{ds}$ и $\frac{dz}{ds}$; поскольку угол касательной с осью Ox мал, величина $\frac{dx}{ds}$ близка к 1, а величины $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$

эквивалентны величинам $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$; следовательно, вектор $\vec{b}$ эквивалентен вектору $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}$. Если учесть равенство (VII, 1; 5), то уравнение (VII, 1; 6) сведется теперь к уравнению

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2}. \qquad \text{(VII, 1; 7)}$$

Мы предположили, что плотность ρ_0 не зависит от x (*струна однородна*); уравнение (VII, 1; 7) можно переписать в виде

$$\boxed{\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2}} \qquad \text{(VII, 1; 8)}$$

с постоянной v, которая имеет размерность скорости

$$v = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}, \quad \text{размерность } v = \frac{(mlt^{-2})^{1/2}}{(ml^{-1})^{1/2}} = lt^{-1}. \qquad \text{(VII, 1; 9)}$$

Как мы увидим в дальнейшем, величину v можно назвать *скоростью распространения поперечных волн в струне*. Можно использовать также *натяжение, приходящееся на единицу сечения* $T'_0 = T_0/\sigma_0$; поскольку $\rho_0 = \omega_0\sigma_0$, имеем

$$v = \sqrt{\frac{T_0}{\sigma_0\omega_0}} = \sqrt{\frac{T'_0}{\omega_0}}. \qquad \text{(VII, 1; 10)}$$

Уравнение (VII, 1; 8) называется *уравнением колебаний струны*. Если спроектировать его на оси Oy и Oz, то получатся два одинаковых уравнения для функций $y(x, t)$ и $z(x, t)$:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \qquad \text{(VII, 1; 11)}$$

Заметим, что длина участка струны Δx равна $\frac{\Delta x}{\cos \alpha}$; если, как и ранее, пренебречь α^2, то эта длина будет оставаться приближенно равной Δx — длине в состоянии покоя, поэтому плотность ρ не меняется, она остается равной ρ_0

(с точностью до бесконечно малых второго порядка). В конечном итоге три уравнения этой задачи для трех неизвестных $\vec{u}$, T, ρ полностью разделяются:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial x^2}, \quad v=\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}},\\ T=T_0,\\ \rho=\rho_0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII, 1; 12)}$$

Второе и третье из них уже решены; требуется решить только первое.

Продольные колебания стержня

Мы рассмотрим теперь однородный металлический прут AB длины L с постоянным поперечным сечением σ_0 и изучим его *продольные* колебания.

Пусть x — абсцисса точки M стержня в состоянии покоя (ось Ox направлена по $\overrightarrow{AB}$, точка O помещена в точку A). В процессе колебаний эта точка будет смещаться в продольном направлении. Обозначим буквой u ее смещение $u=\overline{MM'}=\overline{OM'}-\overline{OM}$, где M' — положение точки M в момент времени t. Здесь снова u является функцией от x и t, которую мы должны определить.

Пусть снова T — натяжение стержня в точке x в момент времени t, определяемое как при поперечных колебаниях струны. Однако здесь имеется серьезное отличие от предыдущего случая. Гибкая струна может быть растянута только с помощью достаточно сильного среднего натяжения $T_0>0$; стержень AB, напротив, может и не быть растянутым ($T_0=0$; натяжение стержня называется также напряжением), стержень может быть даже сжат ($T_0<0$). Изменения натяжения представляют собой реакцию стержня против усилий, стремящихся изменить его форму путем растяжения или сжатия. Мы примем следующий закон, называемый *основным законом упругости*: удлинение $\delta l=l-l_0$ участка стержня длины l_0, находящегося под средним натяжением T_0, приводит к изменению натяжения $\delta T=T-T_0$, которое удовлетворяет соотношению

$$\frac{\delta T}{\sigma_0}=E_0\frac{\delta l}{l_0}; \qquad \text{(VII, 1; 13)}$$

здесь σ_0 — поперечное сечение, а E_0 — *модуль Юнга*, или *модуль упругости* при натяжении T_0. (Модуль Юнга E_0 несколько изменяется при изменении T_0; когда $T_0=0$, величина E_0 будет модулем Юнга в ненапряженном состоянии.)

Этот закон, разумеется, верен только при достаточно малых *относительных удлинениях* $\frac{\delta l}{l_0}$.

Таким образом, сначала надо вычислить относительное удлинение $\lambda = \delta l/l_0$ в каждой точке стержня. Участок $(x, x+\Delta x)$ длины l_0 в состоянии покоя будет занимать в момент времени t положение

$$(x+u(x, t),\ x+\Delta x+u(x+\Delta x, t)).$$

Его длина из $l_0 = \Delta x$ превратится в $l = l_0 + \delta l = \Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x$, а относительное удлинение будет равным

$$\lambda = \frac{\delta l}{l_0} = \frac{\partial u}{\partial x}. \qquad \text{(VII, 1; 14)}$$

(Условие малости δl по сравнению с l_0 означает, что производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ должна быть малой.) Согласно закону упругости, натяжение в точке x в момент времени t должно удовлетворять уравнению

$$T - T_0 = E_0\sigma_0\frac{\partial u}{\partial x}. \qquad \text{(VII, 1; 15)}$$

Пусть снова ρ — линейная плотность стержня, близкая к ρ_0 — линейной плотности в состоянии равновесия при натяжении T_0.

Напишем основное уравнение движения $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ для элемента $(x, x+\Delta x)$ в проекции на ось Ox (другие уравнения не нужны, поскольку движение продольное):

$$\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Delta x = \frac{\partial T}{\partial x}\Delta x, \qquad \text{(VII, 1; 16)}$$

отсюда, если учесть соотношение (VII, 1; 15), получаем уравнение

$$\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E_0\sigma_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad \text{(VII, 1; 17)}$$

Это уравнение совпадает с уравнением колебаний струны (VII, 1; 8) (скалярным, не векторным), со скоростью распространения

$$v = \sqrt{\frac{E_0\sigma_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{E_0}{\omega_0}}. \qquad \text{(VII, 1; 18)}$$

Модуль Юнга играет ту же роль, что и T_0', — натяжение на единицу сечения при поперечных колебаниях струны. К тому же величина E_0 имеет размерность величины $\delta T/\sigma_0$ [см. (VII, 1; 13)], т. е. размерность натяжения на единицу сечения. Опишем основное различие между поперечными и продольными колебаниями. В случае поперечных колебаний фигурирует величина T_0 — среднее натяжение на единицу сечения. В случае продольных колебаний фигурирует величина E_0 — коэффициент, который связывает относительное

удлинение $\lambda = \frac{\delta l}{l_0}$ с приращением $\frac{T - T_0}{\sigma_0}$ натяжения (на единицу сечения) по сравнению с его средним значением. Вот почему поперечные колебания гибкой струны могут наблюдаться только при $T_0 > 0$, тогда как продольные колебания стержня могут происходить и при $T_0 \leqslant 0$.

В качестве примера отметим, что модуль Юнга E_0 для стали имеет порядок 20 000 *кг* на *мм*², что дает в единицах MTS скорость распространения

$$v = \sqrt{\frac{20 \times 9{,}81}{10^{-6} \times 7{,}8}} \approx 5000 \text{ м/сек}.$$

Для плотности каждого элементарного участка l_0 выполняется, согласно ее определению, равенство

$$\rho l = \rho_0 l_0 \qquad \text{(VII, 1; 19)}$$

(сохранение массы). Поэтому

$$\frac{\delta l}{l_0} + \frac{\delta\rho}{\rho_0} = 0; \qquad \text{(VII, 1; 20)}$$

следовательно,

$$\rho - \rho_0 = \delta\rho = -\rho_0 \frac{\delta l}{l_0} = -\rho_0 \lambda = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \text{(VII, 1; 21)}$$

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \text{ и также } \omega = \omega_0 \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right). \qquad \text{(VII, 1; 22)}$$

Окончательно уравнения задачи имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad v = \sqrt{\frac{E_0 \sigma_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{E_0}{\omega_0}}, \\ &T = T_0 + E_0 \sigma_0 \frac{\partial u}{\partial x}, \\ &\rho = \rho_0 - \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII, 1; 23)}$$

Сначала решают первое из этих уравнений (постоянные ρ_0, σ_0 и E_0 известны). После этого два других уравнения оказываются решенными (если T_0 также известно). Впрочем, можно заметить, что функция $U = \frac{\partial u}{\partial x}$ также удовлетворяет уравнению колебаний струны [достаточно продифференцировать первое из уравнений (VII, 1; 23) по x]. Следовательно, этому же уравнению удовлетворяют натяжение T и плотность ρ:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \\ &\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII, 1; 24)}$$

(поскольку константы ρ_0 и T_0 ему удовлетворяют).

Продольные колебания стержня представляют собой, по существу, явление, которое называется *распространением звука* в стержне. Значения модуля Юнга E дают скорость звука в различных твердых телах.

Пусть мы имеем дело со стержнем, который может одновременно совершать продольные и поперечные колебания. Тогда эту задачу можно рассмотреть в целом и в согласии с механическими предположениями, сделанными в двух отдельных задачах, получить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{v_t^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial x^2}, \quad v_t=\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}},\\ &\frac{1}{v_l^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad v_l=\sqrt{\frac{E_0\sigma_0}{\rho_0}},\\ &T=T_0+E_0\sigma_0\frac{\partial w}{\partial x},\\ &\rho_0=\rho_0-\rho_0\frac{\partial w}{\partial x}.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII, 1; 25)}$$

где $\vec{u}$ — поперечное, а w — продольное смещения. Система (VII, 1; 25) сводится к системе (VII, 1; 23), если $\vec{u}=\vec{0}$, и к системе (VII, 1; 12), если $w=0$. Мы видим, что продольных колебаний можно избежать только при $T=T_0$. Первые два уравнения решаются независимо друг от друга; они соответствуют весьма различным скоростям распространения v_t и v_l. Третье и четвертое оказываются решенными после того, как решено второе. Известно, что продольные сейсмические волны распространяются с иной скоростью, чем поперечные, хотя, конечно, распространение сейсмических волн нельзя в точности рассматривать как распространение волн в стержне, подчиняющееся приведенным выше законам.

Продольные колебания столба жидкости или газа

Рассмотрим столб жидкости или газа, заключенный в трубу постоянной ширины, и изучим его продольные колебания. При этих колебаниях каждый слой жидкости, заключенный между двумя близкими нормальными сечениями, смещается как целое в продольном направлении. Жидкость нельзя считать несжимаемой, ибо при этом продольные колебания невозможны; впрочем, и в случае стержня мы должны были допустить малые деформации.

Коэффициент сжимаемости жидкости χ_0 при среднем давлении $p_0>0$ дает связь между изменением давления и относительным сжатием $\lambda=\delta V/V_0$:

$$\frac{\delta p}{p_0}=\frac{p-p_0}{p_0}=-\frac{1}{\chi_0}\frac{\delta V}{V_0}. \qquad \text{(VII, 1; 26)}$$

Это уравнение соответствует уравнению состояния

$$pV^{1/\chi_0} = \text{const}. \qquad \text{(VII, 1; 27)}$$

Величина χ_0 безразмерна.

Поскольку движение является продольным, относительное сжатие $\frac{\delta V}{V_0}$ равно $\frac{\delta l}{l_0}$. С другой стороны, давление есть величина, обратная по знаку натяжению на единицу сечения:

$$\frac{\delta p}{p_0} = \frac{\delta T}{T_0}, \qquad p_0 = -\frac{T_0}{\sigma_0}.$$

Таким образом, соотношение (VII, 1; 26) идентично соотношению (VII, 1; 13) с

$$E_0 = \frac{p_0}{\chi_0}. \qquad \text{(VII, 1; 28)}$$

(При поперечных колебаниях гибкой струны T_0 обязательно больше нуля; при продольных колебаниях стержня T_0 могло иметь произвольный знак; здесь же $p_0 > 0$ и, значит, $T_0 < 0$.)

В силу сказанного мы снова приходим к уравнениям типа (VII, 1; 23) с видоизмененными обозначениями:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad v = \sqrt{\frac{p_0}{\chi_0\omega_0}}, \\ &p = p_0 - \frac{p_0}{\chi_0}\frac{\partial u}{\partial x}, \\ &\rho = \rho_0 - \rho_0\frac{\partial u}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII, 1; 29)}$$

где u — продольное смещение. Как следствие мы получаем, что функции p и ρ также удовлетворяют уравнению колебаний струны.

В случае столба газа мы имеем *акустическую трубу*. Процесс является здесь *адиабатическим* (ибо здесь колебания очень быстрые, несколько сот или тысяч колебаний в секунду, так что они заведомо происходят без обмена теплом с внешней средой). Пусть

$$pV^{\gamma} = \text{const}, \qquad \gamma = \frac{C}{c}\,^{1)}, \qquad \text{(VII, 1; 30)}$$

откуда

$$\chi_0 = \frac{1}{\gamma}, \qquad E_0 = \gamma p_0.$$

---

[1]) Формула $\gamma = \frac{C}{c}$ означает, что показатель γ есть отношение теплоемкости C при постоянном давлении к теплоемкости c при постоянном объеме. — *Прим. перев.*

Таким образом, мы снова имеем соответствующие уравнения (VII, 1; 29), где

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\omega_0}}. \tag{VII, 1; 31}$$

Допустим, что газ является идеальным; тогда

$$p_0 = \frac{\omega_0}{M} RT_0\,[1]), \tag{VII, 1; 32}$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{\gamma}{M} RT_0}. \tag{VII, 1; 33}$$

Скорость распространения звука в идеальном газе пропорциональна квадратному корню из абсолютной температуры.

Упражнение. Вычислить скорость звука в воздухе.

Пусть нас интересует температура газа T в точке x в момент времени t. Дифференцируя равенство (VII, 1; 32), получаем

$$\frac{\delta p}{p_0} - \frac{\delta \omega}{\omega_0} - \frac{\delta T}{T_0} = 0. \tag{VII, 1; 34}$$

Зная уравнения, которым подчиняются p и ω, получаем уравнение для T

$$-\gamma \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\delta T}{T_0} = 0,$$

или

$$T = T_0 - (\gamma - 1) T_0 \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{VII, 1; 35}$$

Отсюда, окончательно, получаем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad v = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\omega_0}} = \sqrt{\frac{\gamma}{M} RT_0}, \\ &\omega = \omega_0 - \omega_0 \frac{\partial u}{\partial x}, \\ &p = p_0 - \gamma p_0 \frac{\partial u}{\partial x}, \\ &T = T_0 - (\gamma - 1) T_0 \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{VII, 1; 36}$$

и как следствие находим, что функции ω, p и T также удовлетворяют уравнению колебаний струны.

---

[1]) Здесь R — универсальная газовая постоянная, M — масса грамм-молекулы газа, T_0 — абсолютная температура. — *Прим. перев.*

2. Решение уравнения колебаний струны методом распространяющихся волн; задачи Коши. Отныне мы не будем заниматься той частной физической задачей, которая лежит в основе уравнения. Мы назовем *уравнением колебаний струны* дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad \text{(VII, 1; 37)}$$

с частными производными. Струна является неограниченной и занимает в состоянии покоя всю ось x; u — функция, определенная при всех значениях x и t.

Чтобы найти общее решение этого дифференциального уравнения, сделаем замену переменных

$$\left.\begin{aligned} x+vt&=\xi, \qquad & x&=\frac{\xi+\eta}{2},\\ &\qquad\text{или}\\ x-vt&=\eta, & t&=\frac{1}{v}\,\frac{\xi-\eta}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII, 1; 38)}$$

Имеем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial \eta}, \quad\text{откуда}\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2}{\partial \xi\,\partial \eta}+\frac{\partial^2}{\partial \eta^2},\\ \frac{\partial}{\partial t}&=v\left(\frac{\partial}{\partial \xi}-\frac{\partial}{\partial \eta}\right), \quad\text{откуда}\quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}=v^2\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2}{\partial \xi\,\partial \eta}+\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right), \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII, 1; 39)}$$

так что

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}=-4\frac{\partial^2}{\partial \xi\partial \eta}. \qquad \text{(VII, 1; 40)}$$

В новых переменных наше уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0\,. \qquad \text{(VII, 1; 41)}$$

Это уравнение решается сразу же:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi}&=f_1(\xi), &&\text{где } f \text{ — произвольная функция,}\\ u&=f(\xi)+g(\eta), &&\text{где } f \text{ — первообразная для } f_1,\\ & &&g \text{ — произвольная функция.} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII, 1; 42)}$$

Эта формула приводит к общему решению уравнения (VII, 1; 37):

$$u(x,\ t)=f(x+vt)+g(x-vt), \qquad \text{(VII, 1; 43)}$$

где f и g — произвольные функции одного переменного. На самом деле эпитет „произвольные“ преувеличен. Эти функции должны быть дважды непрерывно дифференцируемы, если мы хотим, чтобы метод замены перемен-

ных [см. (VII, 1; 39)] был обоснован; как бы то ни было, вторые производные функции u входят в уравнение (VII, 1; 37).

Если же искать решения уравнения (VII, 1; 37) ***в смысле теории распределений***, то приходится считать допустимыми функции f и g одного переменного, которые не обязательно дифференцируемы, а всего лишь локально суммируемы, или даже являются распределениями от одного переменного.

Найденное решение поддается замечательной физической трактовке.

Функция типа $g(x-vt)$ принимает в точке x в момент времени t то значение, которое она принимает в точке $x-vt$ в момент времени 0. Функция $g(x-vt)$ как функция от x, представляющая в момент времени t форму струны в целом, является сдвигом функции $g(x)$ на отрезок $+vt$.

Иными словами, *функция $u=g(x-vt)$ представляет собой некоторую волну, распространяющуюся направо со скоростью v*. Напротив, *функция $u=f(x+vt)$* представляет собой *волну, распространяющуюся налево со скоростью v*. Здесь возможны любые волны, т. е. всякое решение уравнения (VII, 1; 37) является суперпозицией двух произвольных волн, одна из которых распространяется налево, а другая — направо со скоростью v. Вот почему v называется *скоростью распространения волн*. Понятно, что здесь нет никакого переноса материи со скоростью v.

В случае поперечных колебаний струны функция u является поперечным смещением, а величина v - скоростью продольного распространения! Но даже в случае продольных колебаний нет никакой связи между v и скоростью смещения частиц материи $\frac{\partial u}{\partial t}$; если в качестве решения мы возьмем, например, $u=x-vt$, то волна будет распространяться со скоростью $+v$, тогда как скорость частиц материи $\frac{\partial u}{\partial t}$ будет равна $-v$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-v.$$

Если $u=g(x-vt)$, то $\frac{\partial u}{\partial t}=-vg'(x-vt)$ — величина, зависящая от x и t.

Задача Коши

Задача Коши состоит в следующем: надо найти решение уравнения колебаний струны, соответствующее данным начальным условиям:

$$\left.\begin{array}{ll} u(x,\ 0)=u_0(x) & \text{(форма струны в момент времени } t=0\text{),} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)=u_1(x) & \text{(распределение скоростей } \frac{\partial u}{\partial t} \text{ вдоль струны в момент времени } t=0\text{).} \end{array}\right\} \quad \text{(VII, 1; 44)}$$

Поскольку искомое решение имеет вид (VII, 1; 43), нам надо определить функции f и g так, чтобы удовлетворялись начальные условия (VII, 1; 44). Это приводит к уравнениям

$$\left.\begin{aligned} u_0(x) &= f(x) + g(x), \\ u_1(x) &= v(f'(x) - g'(x)). \end{aligned}\right\} \tag{VII, 1; 45}$$

Интегрируя второе уравнение, получим

$$\int_0^x u_1(\xi)\,d\xi = v(f(x) - g(x)) + C. \tag{VII, 1; 46}$$

Наличие этой константы C не удивительно. В представлении (VII, 1; 43) функции u можно, не меняя решения, прибавить к f произвольную постоянную и вычесть эту же постоянную из g. При этом сумма $f+g$ останется неизменной, а разность $f-g$ изменится на произвольную постоянную. Каков бы ни был выбор постоянной C, решение u остается прежним. Решая первое из уравнений (VII, 1; 45) совместно с уравнением (VII, 1; 46), получим

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left\{u_0(x) + \frac{1}{v}\int_0^x u_1(\xi)\,d\xi\right\} - \frac{1}{2}\frac{C}{v}, \\ g(x) &= \frac{1}{2}\left\{u_0(x) - \frac{1}{v}\int_0^x u_1(\xi)\,d\xi\right\} + \frac{1}{2}\frac{C}{v} \end{aligned}\right\} \tag{VII, 1; 47}$$

и затем найдем искомое решение u по формуле (VII, 1; 43):

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+vt) + u_0(x-vt)\right] + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} u_1(\xi)\,d\xi. \tag{VII, 1; 48}$$

Мы видим, что задача Коши имеет одно и только одно решение. Тем не менее, если мы хотим, чтобы это решение было дважды непрерывно дифференцируемым, нам следует предположить, что функция u_0 дважды непрерывно дифференцируема, а функция u_1 один раз непрерывно дифференцируема, что на самом деле вполне естественно.

Замечания. Сделаем некоторые замечания физического характера об этом решении.

1) Значение функции u в точке x в момент времени t зависит только от значений u_0 и u_1 функций u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ в момент времени $t=0$ в точках ин-

тервала $(x - vt,\ x + vt)$. Это согласуется с тем, что мы видели, когда рассматривали скорость распространения. Фактически в решение входят значения u_1 во всем интервале $(x - vt,\ x + vt)$ и значения u_0 только в концах этого интервала.

2) Это явление лучше всего показать на чертеже.

Возьмем точку с абсциссой x и ординатой t и предположим, что $t > 0$. Проведем через точку (x, t) полупрямые наклона $\pm \frac{1}{v}$, направленные вниз; они пересекут ось x в точках $x - vt$ и $x + vt$. Область, заключенная между этими полупрямыми, называется *волновым конусом прошлого* для точки (x, t).

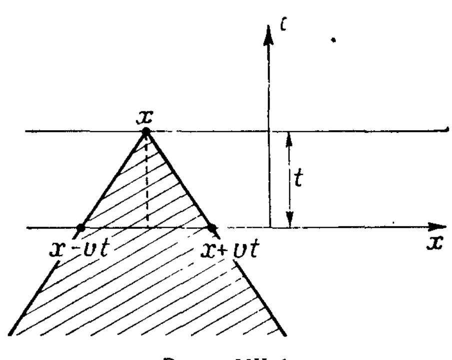


Рис. VII, 1.

Если вместо того, чтобы решать задачу Коши для начального момента времени 0, мы решали бы ее для начального момента τ, $-\infty < \tau < t$, то решение имело бы вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\Big[u_0(x + v(t - \tau)) + u_0(x - v(t - \tau))\Big] + \frac{1}{2v}\int\limits_{x - v(t-\tau)}^{x + v(t-\tau)} u_1(\xi)\, d\xi, \tag{VII, 1; 49}$$

где

$$u_0(x) = u(x, \tau), \qquad u_1(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, \tau).$$

На этот раз нужным интервалом абсцисс был бы интервал $[x - v(t - \tau),\ x + v(t - \tau)]$, т. е. пересечение прямой с ординатой τ с тем же самым волновым конусом прошлого для точки (x, t).

Таким образом, движение струны в точке (ξ, τ), $\tau \leqslant t$, не влияет на ее движение в точке (x, t), если точка (ξ, τ) лежит вне волнового конуса прошлого для точки (x, t).

3) Можно решать *обратную* задачу Коши, в противоположность *прямой* задаче Коши, которую мы только что решили. Это означает, что момент времени τ, для которого задаются функции $u_0 = u$ и $u_1 = \frac{\partial u}{\partial t}$, следует за t, $\tau \geqslant t$. Решение производится аналогичным способом, и снова возникает формула (VII, 1; 49); однако теперь эту формулу лучше записывать в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x + v(\tau - t)) + u_0(x - v(\tau - t))\right] + \\ + \frac{1}{2v}\int_{x-v(\tau-t)}^{x+v(\tau-t)} u_1(\xi)\,d\xi, \qquad \text{(VII, 1; 50)}$$

поскольку $\tau \geqslant t$.

На этот раз нужным интервалом абсцисс будет пересечение прямой с ординатой τ с *волновым конусом будущего* для точки (x, t), т. е. с областью, заключенной между полупрямыми, которые проходят через точку (x, t) и направлены вверх с наклонами $\pm\frac{1}{v}$. Это естественно, поскольку $t \leqslant \tau$, и, значит, то, что происходило в момент t, будет влиять на то, что произойдет в будущем в момент τ; волновой конус будущего для точки (x, t) охватывает множество точек (ξ, τ), на движение в которых может влиять то, что происходило в точке x в момент времени t.

Эти рассуждения о прошлом и будущем являются, с „точки зрения" математического уравнения, чисто субъективными, поскольку уравнение инвариантно при замене t на $-t$.

4) Фронтом волны называется крайняя точка, достигнутая волной; точнее, фронтом волны справа в момент времени t называется верхняя грань носителей функций u и $\frac{\partial u}{\partial t}$, рассматриваемых как функции x в момент времени t. Абсцисса X этого правого волнового фронта является, таким образом, функцией $X(t)$ времени t. Эта функция удовлетворяет некоторому линейному неравенству: правый волновой фронт не может двигаться направо со скоростью, большей скорости v; при $t \geqslant \tau$

$$X(t) \leqslant X(\tau) + v(t - \tau). \qquad \text{(VII, 1; 51)}$$

В самом деле, пусть u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ в момент τ имеют значения u_0 и u_1. Формула (VII, 1; 49) показывает, что u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ в момент t равны нулю при $x \geqslant X(\tau) + v(t - \tau)$, поскольку u_0 и u_1 равны нулю при $x \geqslant X(\tau)$. Отсюда вытекает неравенство (VII, 1; 51).

Заметим, однако, что, обратив направление времени, можно получить неравенство

$$X(\tau) \leqslant X(t) + v(t - \tau), \qquad \text{(VII, 1; 52)}$$

снова при $\tau \leqslant t$. [При этом следует воспользоваться формулой (VII, 1; 50) вместо (VII, 1; 49) и поменять роли t и τ.]

Это неравенство можно записать также в виде

$$X(t) \geqslant X(\tau) - v(t - \tau). \qquad \text{(VII, 1; 53)}$$

Иными словами, правый волновой фронт не может двигаться и влево со скоростью, превосходящей скорость v.

Не следует думать, что правый волновой фронт движется направо со скоростью v, поскольку в этом случае неравенство (VII, 1; 51) всегда было бы равенством. То же самое имело бы место и для неравенства (VII, 1; 52), а тогда эти два равенства были бы противоречивы.

Рассмотрим простой пример со следующими начальными условиями в момент $t = 0$:

$$\left.\begin{array}{ll} u_0(x) > 0 \text{ при } |x| < x_0, & u_0(x) = 0 \text{ при } |x| > x_0, \\ u_1(x) \equiv 0. & \end{array}\right\} \qquad \text{(VII, 1; 54)}$$

Формулы (VII, 1; 49) и (VII, 1; 50) с $\tau = 0$ показывают, что правый волновой фронт дается равенством

$$X(t) = x_0 + v|t|. \qquad \text{(VII, 1; 55)}$$

Он движется со скоростью v при $t \geqslant 0$ и со скоростью $-v$ при $t \leqslant 0$. Самое левое положение он занимает именно в момент времени $t = 0$.

Только что сказанное о правом волновом фронте справедливо и для левого волнового фронта, который удовлетворяет тем же самым неравенствам.

Левый волновой фронт в примере (VII, 1; 54) дается равенством

$$Y(t) = -x_0 - v|t|. \qquad \text{(VII, 1; 56)}$$

В момент времени $t = 0$ он занимает самое правое положение, и именно в этот момент часть струны, которая не находится в состоянии покоя, является самой малой.

Заметим, что движущаяся часть струны в этом примере распадается при $t > x_0/v$ на два непересекающихся участка:

$$(-x_0 - vt,\ x_0 - vt) \quad \text{и} \quad (-x_0 + vt,\ x_0 + vt).$$

5) Говорят, что здесь имеет место ***диффузия волн***, поскольку решение $u(x, t)$ в действительности зависит (через функцию u_1) от начальных значений во всем интервале $(x - vt, x + vt)$, а не только от начальных значений в концах этого интервала.

6) Особенно важен следующий частный случай, когда в качестве начальных условий берутся

$$u_0 = 0 \quad \text{и} \quad u_1 = v^2\delta(x), \qquad \text{(VII, 1; 57)}$$

где δ — распределение Дирака.

Допустив, что формулу (VII, 1; 48) можно применять без предосторожности, получим при $t > 0$ следующее решение:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{v}{2} & \text{при } |x| < vt, \\ 0 & \text{при } |x| > vt, \end{cases} \qquad \text{(VII, 1; 58)}$$

или

$$u(x, t) = \frac{v}{2} Y(vt - |x|),$$

где Y — функция Хевисайда.

Иначе говоря, функция u при $t \geqslant 0$ равна $\frac{v}{2}$ в волновом конусе будущего для начала координат и равна 0 вне этого конуса.

В дальнейшем мы снова получим это частное решение.

Струна с одним закрепленным концом. Отражение волн

Предположим теперь, что струна не является неограниченной, а имеет конец в начале координат; иными словами, предположим, что в состоянии покоя она занимает полуось $x \geqslant 0$; решение u будет функцией, определенной при $x \geqslant 0$, $-\infty < t < \infty$. Как легко видеть, формула (VII, 1; 43) по-прежнему справедлива; функции одного переменного f и g должны быть, конечно, определены [с точностью до аддитивных постоянных противоположного знака; см. формулу (VII, 1; 46)] при *всех значениях переменного*, ибо при фиксированном $x > 0$ выражения $x \pm vt$ меняются от $-\infty$ до $+\infty$, когда t меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Но тогда формула (VII, 1; 43) дает некоторое решение u, определенное *при всех* значениях x и t: *всякое решение и нашего уравнения, заданное в области $x \geqslant 0$, $-\infty < t < \infty$, продолжимо единственным образом до решения $\bar{u}$ во всей плоскости (x, t)*.

Найдем, при каких движениях u конец струны $x = 0$ остается неподвижным. Продолженное решение $\bar{u}$ представляет собой такое движение бесконечной струны, определенное при всех x и t, для которого $\bar{u}(0, t) \equiv 0$.

Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$f(vt)+g(-vt)\equiv 0. \qquad \text{(VII, 1; 59)}$$

Иначе говоря, функции f и g переменного s уже не вполне произвольны; одна из них по-прежнему произвольна, но тогда другая полностью ей определяется. Действительно,

$$f(s)+g(-s)=0 \quad \text{или} \quad g(s)=-f(-s). \qquad \text{(VII, 1; 60)}$$

Теперь общее решение нашей задачи дается, согласно равенству (VII, 1; 43), формулой

$$\overline{u}(x, t)=f(x+vt)-f(-x+vt), \qquad \text{(VII, 1; 61)}$$

где f — произвольная функция одного переменного. Мы видим, что при любом значении t решение $\overline{u}$ *будет нечетной функцией* x, откуда вытекает, что оно обращается в нуль при $x=0$.

Таким образом, всякое решение u уравнения колебаний струны, которое определено при $x\geqslant 0$, $-\infty<t<\infty$, и тождественно равно нулю при $x=0$, продолжается однозначным образом до решения $\overline{u}$, которое определено всюду и которое при любом t является нечетной функцией x:

$$\overline{u}(-x, t)=-\overline{u}(x, t). \qquad \text{(VII, 1; 62)}$$

Заметим, что, согласно формуле (VII, 1; 61), решение $\overline{u}$ представляет собой суперпозицию двух волн $\overline{u}_1$ и $\overline{u}_2$, которые движутся в противоположных направлениях со скоростью v и удовлетворяют, при любом t, соотношению

$$\overline{u}_1(-x, t)=-\overline{u}_2(x, t). \qquad \text{(VII, 1; 63)}$$

Это замечание можно истолковать, сказав, что здесь мы наблюдаем *отражение волн от конца струны* $x=0$ *с изменением знака*.

В самом деле, предположим, что при $t\leqslant 0$ движение струны (сведенной к части $x\geqslant 0$ оси x) представляет собой некоторую волну u, движущуюся влево со скоростью v. Мы должны сначала продолжить это решение при $t\leqslant 0$ на всю ось x таким способом, чтобы полученная волна $\overline{u}$ была нечетной функцией x. Это сводится к тому, что на часть струны $x\leqslant 0$ (фиктивную физически) мы должны поместить волну, противоположную предыдущей и распространяющуюся со скоростью v направо.

Если неограниченно продолжить движение этих волн, то решение, полученное таким способом для всех x при $t\leqslant 0$, продолжится единственным образом на моменты времени $t\geqslant 0$. Но в то время как первоначальная волна, расположенная на реальной части струны $x\geqslant 0$, будет продвигаться к фиктивной части $x\leqslant 0$ и, таким образом, постепенно исчезать, противоположная

волна, располагавшаяся сначала на фиктивной части $x \leqslant 0$, будет постепенно продвигаться на реальную часть струны $x \geqslant 0$. На реальной части струны все это будет выглядеть так, словно первоначальная волна отражается от конца струны $x = 0$ и, изменив свой знак на противоположный, движется в обратном направлении [см. рис. VII, 2 на плоскости (x, u)].

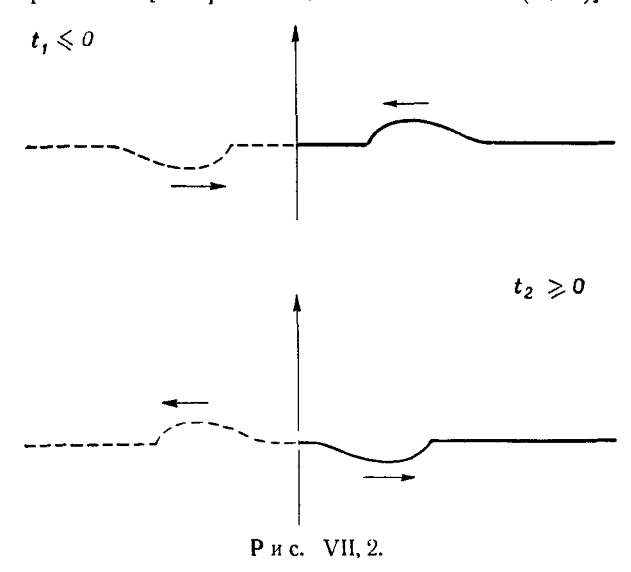


Рис. VII, 2.

Естественно, что при некоторых значениях t (и даже при всех значениях t, если носителем волны является вся струна) будет наблюдаться суперпозиция падающей и отраженной волны. Именно эта суперпозиция и приводит к равенству $u(0, t) \equiv 0$.

Применение. Задача Коши состоит здесь в задании начальных условий $u_0(x) = u(x, \tau)$, $u_1(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, \tau)$ и краевого условия $u(0, t) \equiv 0$.

При $t \geqslant \tau$ решение запишется формулой (VII, 1; 49), если предварительно продолжить функции u_0 и u_1 до нечетных по x функций $\overline{u}_0$ и $\overline{u}_1$. Формула (VII, 1; 49) будет содержать только непродолженные функции u_0 и u_1, если

$$x - v(t - \tau) \geqslant 0.$$

Если же $x - v(t - \tau) < 0$, то, учитывая, что функции $\overline{u}_0$ и $\overline{u}_1$ нечетны, можно видоизменить эту формулу так, чтобы она содержала только непро-

долженные функции u_0 и u_1:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[u_0(x + v(t-\tau)) - u_0(v(t-\tau) - x)] + \frac{1}{2v}\int\limits_{v(t-\tau)-x}^{v(t-\tau)+x} u_1(\xi)\,d\xi. \tag{VII, 1; 64}$$

Вместо рис. VII, 1 мы будем иметь рис. VII, 3, на котором изображен волновой конус прошлого для точки (x, t) в плоскости (x, t).

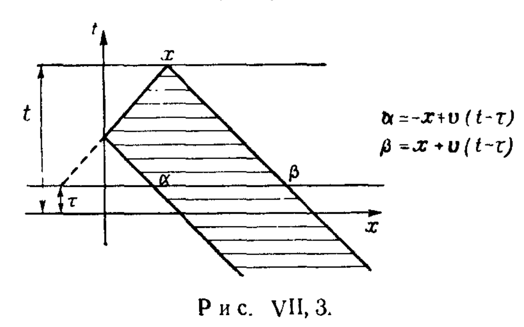


Рис. VII, 3.

Левый луч волнового конуса претерпевает отражение от оси t.

Значения ξ, для которых надо знать u_0 и u_1, чтобы определить $u(x, t)$, лежат в интервале (α, β), который является пересечением этого конуса с прямой, имеющей ординату τ.

Струна с двумя закрепленными концами

Случаи, рассмотренные до сих пор, носят скорее математический, чем физический характер, ибо струна всегда имеет конечную длину.

Пусть струна длины L расположена на участке $0 \leqslant x \leqslant L$ оси x и имеет закрепленные концы. Найдем ее движение. Мы дадим здесь прямое, синтетическое, решение задачи. Решение, которое мы получим в дальнейшем с помощью анализа Фурье, имеет значительно большее практическое значение.

Движение нашей струны снова дается формулой (VII, 1; 43), в которой функции f и g определены при всех значениях переменного, однако условия $u(0, t) \equiv u(L, t) \equiv 0$ приводят теперь к равенствам

$$\left.\begin{aligned} f(vt) + g(-vt) &= 0, \\ f(L + vt) + g(L - vt) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{VII, 1; 65}$$

Первое из этих равенств позволяет выразить функцию g через f, и мы снова приходим к выражению (VII, 1; 61) для u, но теперь уже с функцией f,

удовлетворяющей условию

$$f(L+s)-f(-L+s)=0. \qquad (\text{VII}, 1; 66)$$

Иными словами, f периодична с периодом $2L$. Таким образом, всякое решение u уравнения колебаний струны, которое определено при $0 \leqslant x \leqslant L$, $-\infty < t < \infty$, и удовлетворяет условиям $u(0, t) \equiv u(L, t) \equiv 0$, однозначно продолжается до решения $\bar{u}$, определенного при всех x и t и удовлетворяющего условиям

$$\left.\begin{aligned} &\bar{u}(-x, t) = -\bar{u}(x, t), \\ &\bar{u}(x+2L, t) = \bar{u}(x, t), \quad \bar{u}\left(x, t+\frac{2L}{v}\right) = \bar{u}(x, t). \end{aligned}\right\} \qquad (\text{VII}, 1; 67)$$

Обратно, из этих соотношений вытекает, что

$$u(0, t) \equiv u(L, t) \equiv 0.$$

Второе из соотношений (VII, 1; 67) означает, что при любом t функция $\bar{u}$ будет периодична по x с периодом $2L$; это не удивительно, ибо решение $\bar{u}$ должно быть нечетным, т. е. антисимметрическим по отношению к точке $x=0$, но оно должно быть также антисимметрическим и по отношению к точке $x=L$, и, значит, оно должно быть периодическим с периодом $2L$; этот факт имеет только теоретическое значение, поскольку длина струны равна L. Третье из соотношений (VII, 1; 67) означает, что решение $\bar{u}$ должно быть периодическим и по времени с периодом $2L/v$; а этот факт имеет существенный физический смысл: *всякое движение струны длины L с неподвижными концами является периодическим во времени с периодом $2L/v$.*

Это очень просто понять, если заметить, что всякая волна последовательно отражается от концов струны $x=0$ и $x=L$, меняя каждый раз свой знак; по истечении времени $2L/v$ любая волна, двигавшаяся сначала направо или налево, отразится от каждого из концов и вернется в отправную точку с первоначальным знаком.

Применение. Задача Коши состоит здесь в задании начальных условий

$$u_0(x) = u(x, \tau), \quad u_1(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, \tau)$$

при $0 \leqslant x \leqslant L$ и краевых условий $u(0, t) \equiv u(L, t) \equiv 0$. Чтобы решить ее при $t \geqslant \tau$, продолжают функции u_0 и u_1 до функций $\bar{u}_0$ и $\bar{u}_1$ так, чтобы последние были нечетны и антисимметричны по отношению к точке $x=L$ и, значит, периодичны с периодом $2L$. Затем применяют формулу (VII, 1; 49).

Если учесть антисимметричность и периодичность, то этой формуле можно придать вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left[\pm u_0(\alpha) \pm u_0(\beta)\right] + \frac{1}{2v}\int_{\alpha}^{\beta} u_1(\xi)\,d\xi, \qquad \text{(VII, 1; 68)}$$

где α и β — точки пересечения лучей, ограничивающих волновой конус прошлого для точки (x, t), с прямой, имеющей ординату τ. Эти лучи суть

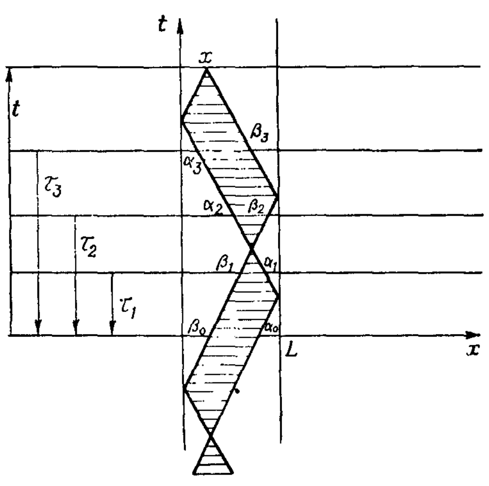


Рис. VII, 4.

прямые, исходящие из точки (x, t) и направленные вниз с наклонами $\pm\frac{1}{v}$; они подвергаются отражениям от вертикалей $x = 0$ и $x = L$. Знаки $+$ или $-$ в формуле (VII, 1; 68) выбираются по правилу $(-1)^{\nu}$, где ν — число рассматриваемых отражений. Например, на рис. VII, 4 знаки определяются так:

-1 для α_3, $+1$ для β_3, если $\tau = \tau_3$;
-1 для α_2, -1 для β_2, если $\tau = \tau_2$;
-1 для α_1, -1 для β_1, если $\tau = \tau_1$;
$+1$ для α_0, -1 для β_0, если $\tau = \tau_0 = 0$.

Заметим, что $\alpha_1 > \beta_1$ и $\alpha_0 > \beta_0$; интеграл вида $\int_{\alpha}^{\beta} u_1(\xi)\,d\xi$ при $\alpha > \beta$ можно заменить на интеграл $-\int_{\beta}^{\alpha} u_1(\xi)\,d\xi$. Знак разности $\beta - \alpha$ определяется

числом $(-1)^{\mu}$, где μ — число пересечений лучей, ограничивающих конус, между ординатами τ и t. Примем за τ значение ординаты, которое соответствует первому пересечению лучей ($\tau_1 < \tau < \tau_2$), тогда $\tau = t - \frac{L}{v}$; и мы получаем замечательную формулу $u(x, t) = -u_0(L - x, t)$; эта формула соответствует общей формуле $u(x, t) \equiv -u\left(L - x, t + \frac{L}{v}\right)$, которая является еще одним следствием из соотношений (VII, 1; 61), (VII, 1; 66) и (VII, 1; 67); если добавить к времени полупериод L/v, то новое положение волны будет антисимметрично старому по отношению к точке $x = L/2$ — середине струны. Второе пересечение лучей соответствует ординате $\tau = t - \frac{2L}{v}$ (здесь $\tau < 0$); мы снова получаем соотношение $u(x, t) = u_0(x, \tau)$ — периодичность во времени с периодом $2L/v$.

Акустические трубы Уравнение колебаний в акустической трубе совпадает с уравнением колебаний струны, однако краевые условия могут быть иными. Концы трубы могут быть открыты или закрыты, однако один из концов трубы всегда должен быть открыт, для того чтобы колебания столба воздуха в трубе могли поддерживаться вдуванием струи воздуха; в зависимости от того, открыт или закрыт другой конец трубы, трубу называют открытой или закрытой.

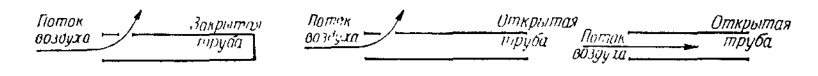


Рис. VII, 5.

Мы обозначили буквой u смещение нормального к трубе слоя газа, поэтому краевое условие на закрытом конце имеет вид $u = 0$, как в случае струны, имеющей закрепленный конец.

Рассмотрим, напротив, открытый конец. Считают, что на таком конце давление газа, соприкасающегося с внешней средой, остается постоянным (равным атмосферному давлению или немного большим). Третья из формул (VII, 1; 36) показывает, что это предположение сводится к краевому условию $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ (а не $u = 0$) на открытом конце трубы. Чтобы изучить, что происходит на таком конце, мы хотим, как и в случае струны, рассмотреть полубесконечную трубу, занимающую часть $x \geqslant 0$ оси x. Конец $x = 0$ будем считать открытым. Пусть u — некоторое решение уравнения (VII, 1; 37), определенное при $x \geqslant 0$ и удовлетворяющее условию $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \equiv 0$.

Согласно рассуждениям на стр. 294, функцию u всегда можно выразить формулой (VII, 1; 43) и всегда можно продолжить до решения $\bar{u}$, определенного всюду. Напишем краевое условие на конце $x=0$:

$$f'(vt)+g'(-vt)=0. \qquad \text{(VII, 1; 69)}$$

На этот раз функции f и g переменного s удовлетворяют соотношению

$$f'(s)+g'(-s)=0. \qquad \text{(VII, 1; 70)}$$

Интегрируя это соотношение, получим

$$f(s)-g(-s)=\text{const}. \qquad \text{(VII, 1; 71)}$$

Безразлично, какова величина этой постоянной (см. стр. 290). Мы примем ее равной нулю. Тогда окончательно получим общий вид решения:

$$\bar{u}(x,\ t)=f(x+vt)+f(-x+vt). \qquad \text{(VII, 1; 72)}$$

Мы видим, что при любом значении t функция $\bar{u}$ будет *четной* функцией от x; это не удивляет нас, поскольку функция $\frac{\partial u}{\partial x}$ также является решением уравнения (VII, 1; 37), однако эта функция удовлетворяет условию $\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t)\equiv 0$, и, значит, она должна быть нечетной функцией от x.

Рассуждение, аналогичное рассуждению на стр. 295, показывает, что *на открытом конце также происходит отражение волн, но без изменения знака* (и, естественно, — суперпозиция падающей и отраженной волны).

Применение. Решение задачи Коши

$$u_0(x)=u(x,\ \tau),\ u_1(x)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ \tau),$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t)\equiv 0$$

получают, продолжив u_0 и u_1 до четных функций $\bar{u}_0$ и $\bar{u}_1$.

Вместо формулы (VII, 1; 64) при $t\geqslant\tau$ и $x-v(t-\tau)<0$ справедлива формула

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}[u_0(x+v(t-\tau))+u_0(v(t-\tau)-x)]+$$
$$+\frac{1}{2v}\left[2\int\limits_0^{v(t-\tau)-x}u_1(\xi)\,d\xi+\int\limits_{v(t-\tau)-x}^{x+v(t-\tau)}u_1(\xi)\,d\xi\right]. \qquad \text{(VII, 1; 73)}$$

Волновой конус прошлого для точки (x, t) состоит из двух частей, одной из которых сопоставляется коэффициент 1, а другой 2 [для того, чтобы получить интегралы в формуле (VII, 1; 73)].

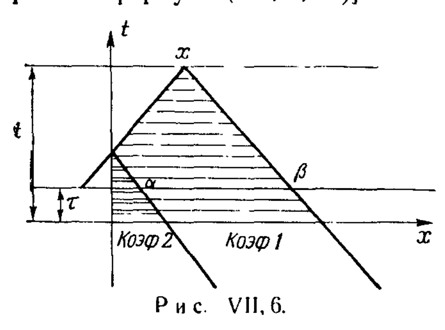


Рис. VII, 6.

Теперь мы без труда рассмотрим задачу об открытой трубе и задачу о закрытой трубе.

Открытые трубы Здесь снова наиболее важным является решение Фурье (стр. 315).

Труба занимает участок $0 < x < L$ оси x; оба ее конца открыты. Решение дается формулой (VII, 1; 43), в которой функции f и g определены при всех значениях переменного и удовлетворяют соотношениям

$$f'(vt) + g'(-vt) = 0, \quad f'(L + vt) + g'(L - vt) = 0. \qquad \text{(VII, 1; 74)}$$

Эти уравнения интегрируются, как уравнение (VII, 1; 70), однако постоянные интегрирования не обязательно совпадают. Первую из них можно считать равной нулю, тогда вторая будет некоторой константой A_1. Это сводится к утверждению, что функция u продолжена до решения $\bar{u}$, которое определено всюду и имеет вид

$$\bar{u}(x, t) = f(x + vt) + f(-x + vt), \qquad \text{(VII, 1; 75)}$$

где

$$f(L + s) - f(-L + s) = A_1. \qquad \text{(VII, 1; 76)}$$

Если $A_1 \neq 0$, то функция f не будет периодической, однако f будет равна сумме линейной функции $A_1 \frac{s}{2L}$ и некоторой периодической функции.

Для решения $\bar{u}$ мы получаем отсюда следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{u}(-x, t) = \bar{u}(x, t), \\ &\bar{u}(x + 2L, t) = \bar{u}(x, t), \quad \bar{u}\left(x, t + \frac{2L}{v}\right) = \bar{u}(x, t) + 2A_1. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII, 1; 77)}$$

При фиксированном t функция $\bar{u}$ периодична по x с периодом $2L$; это естественно, поскольку она четна, т. е. симметрична по отношению к точке $x=0$, и симметрична также по отношению к точке $x=L$. По времени функция $\bar{u}$ не будет периодической, если $A_1 \neq 0$, однако $\bar{u}$ будет суммой линейной функции $At = A_1 \frac{vt}{L}$ и некоторой периодической функции с периодом $2L/v$. Член $At = A_1 \frac{vt}{L}$ описывает равномерный поток газа через трубу, что естественно, поскольку труба открыта с обоих концов (рис. VII, 5); с точностью до этого равномерного потока решение периодично с периодом $2L/v$.

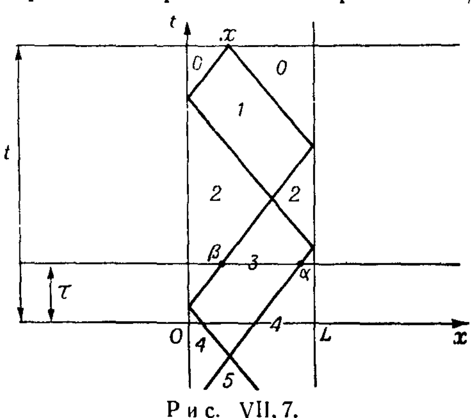


Рис. VII, 7.

Применение. Формула для решения задачи Коши $\left(u_0(x) = u(x, \tau),\ u_1(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, \tau),\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \equiv \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) \equiv 0\right)$ является здесь достаточно сложной; сначала продолжают функции u_0 и u_1 до четных, периодических с периодом $2L$, функций $\bar{u}_0$ и $\bar{u}_1$, а затем приводят формулу (VII, 1; 49) к виду

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[u_0(\alpha) + u_0(\beta)] + \frac{1}{2v}\int_0^L n(\xi)\, u_1(\xi)\, d\xi, \qquad \text{(VII, 1; 78)}$$

где коэффициент $n(\xi)$ — целое число, изменяющееся вместе с ξ вдоль отрезка $[0, L]$. Этот коэффициент можно вычислить, рассмотрев волновой конус прошлого для точки (x, t), который делит вертикальную полосу $0 \leqslant x \leqslant L$ на области, в каждой из которых этот коэффициент постоянен. Например, для значения τ, показанного на рисунке, имеем $\alpha > \beta$ и $n(\xi) = 2$ при $0 < \xi < \beta$, $n(\xi) = 3$ при $\beta < \xi < \alpha$ и $n(\xi) = 4$ при $\alpha < \xi < L$.

Легко вычислить непериодическую часть решения u, ибо коэффициент A дается формулой

$$A = A_1 \frac{v}{L} = \frac{v}{L} \frac{1}{2}\left[u\left(x, \tau + \frac{2L}{v}\right) - u(x, \tau)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{4}{2L} \int_0^L u_1(\xi)\, d\xi = \frac{1}{L} \int_0^L u_1(\xi)\, d\xi \quad \text{(VII, 1; 79)}$$

$\left(\text{при } t = \tau + \frac{2L}{v} \text{ коэффициент } n(\xi) \text{ равен } 4\right)$.

См. решение методом Фурье (стр. 317).

Закрытые трубы Предположим, что труба закрыта на конце $x = 0$ и открыта на конце $x = L$. Решение u дается формулой (VII, 1; 43), в которой функции f и g удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{aligned} f(vt) + g(-vt) &= 0, \\ f'(L + vt) + g'(L - vt) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \text{(VII, 1; 80)}$$

Второе из них всегда можно проинтегрировать и, положив постоянную интегрирования равной нулю, получить соотношение

$$f(L + vt) - g(L - vt) = 0. \quad \text{(VII, 1; 81)}$$

Тогда функция u продолжится до решения $\bar{u}$, которое определено всюду и имеет вид

$$\bar{u}(x, t) = f(x + vt) - f(-x + vt), \quad \text{(VII, 1; 82)}$$

где

$$f(L + s) + f(-L + s) = 0. \quad \text{(VII, 1; 83)}$$

Здесь функция f антипериодична с антипериодом $2L$, поэтому она периодична с периодом $4L$. Это приводит к следующим соотношениям для $\bar{u}$:

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}(-x, t) &= -\bar{u}(x, t), \\ \bar{u}(x + 2L, t) = -\bar{u}(x, t), \quad \bar{u}\left(x, t + \frac{2L}{v}\right) &= -\bar{u}(x, t). \end{aligned}\right\} \quad \text{(VII, 1; 84)}$$

При фиксированном t решение $\bar{u}$ антипериодично по x с антипериодом $2L$; это естественно, поскольку оно антисимметрично относительно точки $x = 0$ и симметрично относительно точки $x = L$. По времени функция $\bar{u}$ антипериодична с антипериодом $2L/v$; это естественно, ибо по истечении времени $2L/v$ всякая волна отражается от каждого из концов трубы, меняя при этом знак только один раз, и возвращается в первоначальное положение с измененным знаком.

Применение. Формула для решения задачи Коши

$$\left(u_0(x)=u(x, \tau), \quad u_1(x)=\frac{\partial u}{\partial t}(x, \tau), \quad u(0, t)\equiv\frac{\partial u}{\partial x}(L, t)\equiv 0\right)$$

имеет следующий вид:

$$u(x, t)=\frac{1}{2}[\pm u_0(\alpha)\pm u_0(\beta)]+\frac{1}{2v}\int_0^L n(\xi)\,u_1(\xi)\,d\xi. \qquad \text{(VII, 1; 85)}$$

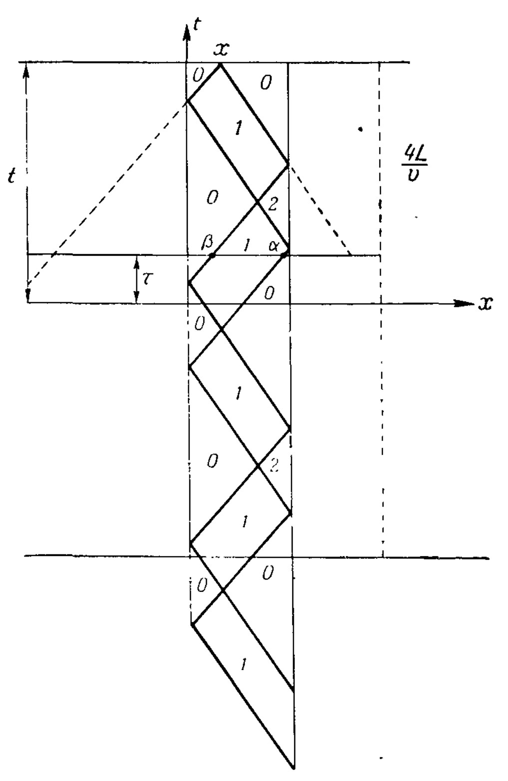


Рис. VII, 8.

Знаки $\pm$ перед $u_0(\alpha)$ или $u_0(\beta)$ определяются числом $(-1)^\nu$, где ν — число отражений соответствующего луча от вертикали $x=0$. Коэффициент $n(\xi)$ зависит от того, в какой из областей по отношению к волновому конусу прошлого точки (x, t) мы находимся.

Например, для значения τ, указанного на рис. VII, 8, перед $u_0(\alpha)$ следует взять знак —, а перед $u_0(\beta)$ — знак $+$. Здесь $\alpha > \beta$, и коэффициент $n(\xi)$ равен 0 всюду, кроме отрезка $\beta < \xi < \alpha$, на котором он равен 1; интеграл сводится к интегралу $\int\limits_{\beta}^{\alpha}$.

Интегралы энергии Рассмотрим, например, случай продольных колебаний стержня.

Уравнение энергии выражает тот факт, что производная по времени от полной кинетической энергии стержня равна *мощности* системы сил, действующих в стержне. Это уравнение является следствием из основного уравнения движения $\left[\text{из равенства } \vec{F} = m\vec{\gamma} \text{ вытекает соотношение } P = \vec{F} \cdot \vec{v} = \right.$ $\left. = \dot{m}\vec{\gamma} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} mv^2\right)\right]$.

Кинетическая энергия стержня выражается интегралом

$$E_c = \int\limits_0^L \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx. \qquad \text{(VII, 1; 86)}$$

Чтобы вычислить мощность системы сил, действующих в стержне, нужно взять элемент $(x, x + \Delta x)$ стержня, рассмотреть *результирующую* сил, действующих на этот элемент, и умножить ее на *среднюю* скорость $\frac{\partial u}{\partial t}$ этого элемента, а затем просуммировать полученные мощности по всем элементам[1]. Результирующая сил, действующих на элемент, равна

$$E_0\sigma_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - E_0\sigma_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = E_0\sigma_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x, \qquad \text{(VII, 1; 87)}$$

и, следовательно, мощность системы сил, действующих во всем стержне, дается интегралом

$$\int\limits_0^L E_0\sigma_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dx. \qquad \text{(VII, 1; 88)}$$

[1]) Могло бы показаться, что скорее надо рассматривать силы, которые действуют на концы каждого из элементов, и умножать каждую из этих сил на скорость точки ее приложения, а затем суммировать результаты, полученные для отдельных элементов. Таким образом, „слагаемое" $\left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial t}$ заменилось бы на „слагаемое" $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t}\right)$. Однако этот метод ошибочен; он не вытекает из уравнений $\vec{F} = m\vec{\gamma}$, примененных к отдельным элементам. Все промежуточные члены сокращаются и остаются только конечные члены; при этом возникает неправильное уравнение, в которое превратилось бы уравнение (VII, 1; 93), если откинуть в нем второе слагаемое в левой части!

Отсюда мы получаем уравнение энергии

$$\frac{d}{dt}\int_0^L \frac{1}{2}\rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx = \int_0^L E_0\sigma_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\,dx. \qquad \text{(VII, 1; 89)}$$

Это уравнение можно записать в ином виде, который справедлив для всех моделей

$$\frac{d}{dt}\int_0^L \frac{1}{2}\,\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx = \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\,dx \qquad \text{(VII, 1; 90)}$$

(это сводится к такому выбору единиц, при котором $E_0\sigma_0 = 1$).

Заметим, что это уравнение является прямым следствием уравнения колебаний струны (VII, 1; 8), ибо левая часть (VII, 1; 90) есть не что иное, как интеграл

$$\int_0^L \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\,dx. \qquad \text{(VII, 1; 91)}$$

Равенство (VII, 1; 90) представляет собой равенство между двумя величинами, зависящими только от t и не зависящими от x. Это равенство является не линейным, а *квадратичным*, т. е. равенством двух величин второго порядка малости по сравнению с величиной u. Вот почему в нем можно пренебрегать только величинами третьего порядка.

Преобразуем уравнение (VII, 1; 90), проинтегрировав по частям правую часть. Правая часть примет при этом вид

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x=0}^{x=L} - \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\,dx =$$

$$= \left[\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x=0}^{x=L} - \frac{d}{dt}\int_0^L \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx. \qquad \text{(VII, 1; 92)}$$

Отсюда мы получаем новое уравнение:

$$\frac{d}{dt}\int_0^L \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) dx = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x=0}^{x=L}. \qquad \text{(VII, 1; 93)}$$

Правая часть представляет собой не что иное, как *мощность внешних сил* (т. е. сил натяжения или давления на обоих концах стержня).

Мы видим, таким образом, что первый принцип термодинамики удовлетворен и что система в каждый момент своего движения обладает некоторой энергией, энергией, которая записывается в виде

$$E=\frac{1}{2}\int_0^L\left\{\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}dx, \qquad \text{(VII, 1; 94)}$$

зависит от состояния системы (т. е. от положений и скоростей частиц) и распадается на сумму кинетической энергии E_c и внутренней энергии E_i. Равенство (VII, 1; 93), проинтегрированное по t от t_1 до t_2, выражает тот факт, что *работа внешних сил равна изменению полной энергии* E_2-E_1. Если на каждом из концов стержня выполнено какое-либо из условий $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ или $u=0$ $\left(\text{при } u=0, \text{ дифференцируя по } t, \text{ получаем } \frac{\partial u}{\partial t}=0\right)$, то работа внешних сил равна нулю и *энергия E все время остается постоянной.*

Возвращение к задаче Коши. Единственность решения

Общая задача Коши состоит в следующем. Надо найти решение u уравнения колебаний струны, которое удовлетворяет следующим условиям.

1. Начальные условия. *При $t=0$ функции u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ совпадают с данными функциями u_0 и u_1 от x.*

2. Краевые условия. *При $x=0$ и $x=L$ задаются значения u или $\frac{\partial u}{\partial x}$ как функции времени.*

Покажем, что эта задача имеет самое большее *одно* решение. В силу линейности уравнения колебаний струны разность двух решений снова будет некоторым решением U. При этом функция U удовлетворяет нулевым начальным условиям $U_0=U_1=0$ и краевым условиям

$$U(x,t)=0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial U}{\partial x}(x, t)=0,$$

когда $x=0$ и когда $x=L$.

При этих условиях разность $\left[\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial t}\right]_{x=0}^{x=L}$ равна нулю в любой момент времени. Уравнение энергии (VII, 1; 93) показывает тогда, что интеграл (VII, 1; 94) сохраняет все время постоянное значение; но ведь при $t=0$ полная энергия равна нулю:

$$\frac{1}{2}\int_0^L\left(\frac{1}{v^2}\cdot U_1^2(x)+U_0'^2(x)\right)dx=0. \qquad \text{(VII, 1; 95)}$$

Поэтому полная энергия равна нулю в любой момент времени t. Поскольку она представляет собой интеграл от неотрицательной функции, эта функция равна нулю почти всюду; но ведь эта функция непрерывна (мы предполагаем, что решение нашего уравнения дважды непрерывно дифференцируемо), следовательно, частные производные

$$\frac{\partial U}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial x}$$

тождественно равны нулю. Отсюда вытекает, что функция U будет постоянной, не зависящей от x и от t. Поскольку эта постоянная равна нулю при $t=0$, функция U равна нулю тождественно, а поскольку она является разностью двух решений, эти решения совпадают.

На предыдущих страницах мы решали различные задачи Коши, отправляясь от общего решения (VII, 1; 43). Мы собираемся теперь использовать совершенно иной метод — метод Фурье.

Задача Коши для колеблющейся струны с закрепленными концами

3. Решение задачи Коши методом рядов Фурье. Мы собираемся доказать для этого случая колебаний струны существование решения и эффективно найти это решение. Краевые условия имеют здесь вид

$$u(0,\ t) \equiv u(L,\ t) \equiv 0,$$

а начальные данные, как всегда, u_0 и u_1 (с очевидным согласованием $u_0(0)=u_0(L)=u_1(0)=u_1(L)=0$).

Стационарным движением струны называется движение, при котором функция $u(x,\ t)$ является произведением некоторой функции от x на некоторую функцию от t:

$$u(x,\ t)=U(x)V(t). \qquad \text{(VII, 1; 96)}$$

Найдем стационарные движения струны с закрепленными концами. Для такого движения уравнение колебаний струны записывается в виде

$$\frac{1}{v^2}UV''=U''V, \qquad \text{(VII, 1; 97)}$$

или

$$\frac{1}{v^2}\frac{V''}{V}=\frac{U''}{U}=-\lambda, \qquad \text{(VII, 1; 98)}$$

где величина λ является постоянной, поскольку она должна зависеть только от x и одновременно — только от t. Обратно, если λ — произвольная вещественная постоянная, то решения $U(x)$ и $V(t)$ дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} V''+\lambda v^2V=0, \\ U''+\lambda U=0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII, 1; 99)}$$

определяют некоторое стационарное движение. Предполагается, что функция $V(t)$ не равна тождественно нулю, в противном случае струна оставалась бы неподвижной все время. Но тогда значения $u(0, t)$ и $u(L, t)$ могут равняться нулю при любом t, только если

$$U(0) = U(L) = 0.$$

Последние же равенства могут иметь место только при исключительных значениях λ.

В самом деле, решение второго из уравнений (VII, 1; 99) при $\lambda \neq 0$ имеет вид

$$U(x) = A\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\sin\sqrt{\lambda}\,x \qquad \text{(VII, 1; 100)}$$

(если $\lambda < 0$, то $\sqrt{\lambda}$ — мнимое число и cos и sin превращаются в ch и sh). Условие $U(0) = 0$ определяет постоянную A:

$$A = 0.$$

Тогда условие $U(L) = 0$ приводит к равенству

$$\sin\sqrt{\lambda}\,L = 0 \qquad \text{(VII, 1; 101)}$$

[если учесть, что $B \neq 0$, в противном случае мы снова имели бы тождество $u(x, t) \equiv 0$].

Уравнение (VII, 1; 101) показывает, что $\lambda > 0$ (ибо гиперболический синус не может обращаться в нуль при вещественных значениях переменного, отличных от нуля) и что при этом

$$\sqrt{\lambda}\,L = k\pi \quad \text{или} \quad \sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{L}, \qquad \text{(VII, 1; 102)}$$

где k — целое число.

Следовательно, решение U уравнения (VII, 1; 99), которое мы должны удержать, имеет вид

$$\sin k\pi\frac{x}{L} \qquad \text{(VII, 1; 103)}$$

с точностью до постоянного множителя. Не меняя результат, этот постоянный множитель можно принять равным 1, ибо всякий постоянный множитель у функции U можно отнести к V. По той же причине можно считать, что $k > 0$, ибо замена k на $-k$ сводится к умножению U на -1.

Случай $\lambda = 0$ требует отдельного исследования, потому что при $\lambda = 0$ решение второго из уравнений (VII, 1; 99) имеет иной вид, а именно

$$U(x) = Ax + B. \qquad \text{(VII, 1; 104)}$$

Никакая линейная функция не может обращаться в нуль при $x=0$ и $x=L$, не будучи тождественным нулем, следовательно, $\lambda=0$ не приводит ни к какому стационарному движению (отличному от $u(x, t)\equiv 0$).

Теперь остается решить первое уравнение (VII, 1; 99), любое из решений которого приводит к допустимому стационарному движению.

Общее решение имеет вид

$$V(t)=A\cos v\sqrt{\lambda}\,t+B\sin v\sqrt{\lambda}\,t=A\cos k\pi\frac{vt}{L}+B\sin k\pi\frac{vt}{L}. \qquad \text{(VII, 1; 105)}$$

Стационарные движения струны с закрепленными концами зависят, таким образом, от произвольного целого числа $k>0$, а при фиксированном k — от двух вещественных параметров A и B. Наиболее общий вид такого стационарного движения следующий:

$$u(x, t)=\sin k\pi\frac{x}{L}\left(A\cos k\pi\frac{vt}{L}+B\sin k\pi\frac{vt}{L}\right). \qquad \text{(VII, 1; 106)}$$

Стационарные движения, отвечающие данному целому числу k, имеют период (по времени)

$$T=\frac{2\pi}{k\pi\frac{v}{L}}=\frac{2L}{kv} \qquad \text{(VII, 1; 107)}$$

и частоту

$$N=\frac{1}{T}=k\frac{v}{2L}. \qquad \text{(VII, 1; 108)}$$

Все эти частоты являются кратными „основной частоты“ $N_0=\frac{v}{2L}$.

Для периодического колебания, распространяющегося со скоростью v, вводят также *длину волны* $\Lambda=vT$, т. е.

$$\Lambda=\frac{2L}{k} \quad \text{или} \quad L=k\frac{\Lambda}{2}. \qquad \text{(VII, 1; 109)}$$

Эта длина волны служит периодом по x для решения $\bar{u}$, продолжающего решение u (см. стр. 298).

Следовательно, длины волн стационарных движений струны с закрепленными концами таковы, что L является *целым кратным полудлины волны*. Этот факт легко почувствовать интуитивно, если продолжить функцию U (см. рис. VII, 9) за пределы интервала $0\leqslant x\leqslant L$ сначала по *антисимметрии*, а затем по *периодичности* с периодом $2L$. Этот способ продолжения функции U за пределы струны (который сводится к естественному продолжению функции $\sin(k\pi x/L)$) был обоснован ранее соображениями общего характера.

Мы покажем теперь, что данную задачу Коши можно решить, предположив, что решение $u(x, t)$ является *бесконечной линейной комбинацией стационарных движений струны с закрепленными концами.* Если мы найдем такое решение, то оно будет единственным в силу уже доказанной теоремы единственности и в силу результата, полученного на стр. 298.

Поскольку любое решение нашего уравнения определяется своими начальными данными u_0 и u_1, мы тем самым покажем, что *любое решение* уравнения колебаний струны с закрепленными концами является комбинацией

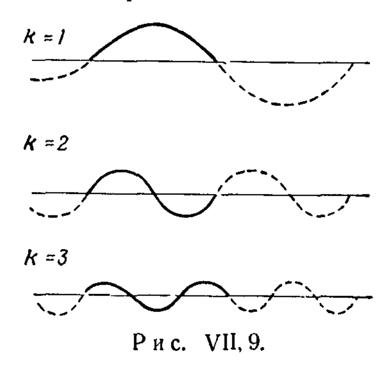


Рис. VII, 9.

стационарных решений. Этим в свою очередь мы снова докажем, что всякое решение имеет период $2L/v$ — общее кратное периодов всех стационарных движений.

Итак, будем искать решение в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\pi \frac{x}{L}\left(A_k \cos k\pi \frac{vt}{L} + B_k \sin k\pi \frac{vt}{L}\right). \quad \text{(VII, 1; 110)}$$

Напишем, что u удовлетворяет начальным условиям

$$u_0(x) = u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin k\pi \frac{x}{L}, \quad \text{(VII, 1; 111)}$$

$$u_1(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} k\pi \frac{v}{L} B_k \sin k\pi \frac{x}{L}. \quad \text{(VII, 1; 112)}$$

Но ведь любая функция от x, заданная в интервале $(0, L)$, допускает единственное (формальное) разложение в ряд Фурье по функциям $\sin k\pi \frac{x}{L}$.

В самом деле, продолжим такую функцию нечетно на интервал $(-L, 0)$, а затем периодично с периодом $2L$ на всю вещественную ось. [Она будет при этом антисимметрична по отношению к точке $x=L$, ибо из соотношений $f(-x)=-f(x)$ и $f(x+2L)=f(x)$ вытекает соотношение $f(2L-x)= -f(x)$. Обратно, всякая функция, антисимметричная по отношению к точкам $x=0$ и $x=L$, имеет период $2L$, ибо из соотношений $f(-x)=-f(x)$ и $f(2L-x)=-f(x)$ вытекает соотношение $f(x+2L)=f(x)$.] Продолженную функцию можно будет тогда разложить по функциям $\cos k\omega x$ и $\sin k\omega x$, $\omega=\frac{2\pi}{2L}=\frac{\pi}{L}$, а поскольку она нечетна, в ее разложении останутся только функции $\sin k\pi\frac{x}{L}$.

Из формул (VII, 1; 111) и (VII, 1; 112) мы получаем явные выражения для коэффициентов A_k и B_k:

$$\left.\begin{aligned} A_k&=\frac{2}{L}\int_0^L u_0(\xi)\sin k\pi\frac{\xi}{L}\,d\xi,\\ B_k&=\frac{2}{k\pi v}\int_0^L u_1(\xi)\sin k\pi\frac{\xi}{L}\,d\xi. \end{aligned}\right\} \tag{VII, 1; 113}$$

[Заметим, что, согласно разложению (VII, 1; 110), коэффициенты A_k и B_k имеют ту же размерность, что и функция u, т. е. l; поскольку функция u_0 имеет такую же размерность, а функция u_1 имеет размерность $u\cdot t^{-1}=l\cdot t^{-1}$, правые и левые части формул (VII, 1; 113) имеют одинаковые размерности, ибо синус — величина безразмерная, а $d\xi$ имеет размерность l.]

Явное решение задачи Коши окончательно имеет вид

$$u(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sin k\pi\frac{x}{L}\left[\left(\cos k\pi\frac{vt}{L}\right)\frac{2}{L}\int_0^L u_0(\xi)\sin k\pi\frac{\xi}{L}\,d\xi+\right.$$
$$\left.+\left(\sin k\pi\frac{vt}{L}\right)\cdot\frac{2}{k\pi v}\int_0^L u_1(\xi)\sin k\pi\frac{\xi}{L}\,d\xi\right]. \tag{VII, 1; 114}$$

Если предположить, что начальные данные u_0 и u_1 имеют непрерывные первые производные, то ряды Фурье (VII, 1; 111) и (VII, 1; 112) будут равномерно сходящимися [1]). Однако это не решает вопрос о сходимости ряда (VII, 1; 114). Это не решает также и главный вопрос о дифференцируемости u по x и t до второго порядка включительно, которая только и

[1]) См. предложение 3 гл. IV, стр. 177. — *Прим. перев.*

позволяет утверждать, что ряд из стационарных решений, задающий u, сам является решением уравнения колебаний струны. Здесь возникают трудности, на которых мы не останавливаемся. (Эти затруднения полностью отпадут, если понимать сходимость и дифференцируемость в смысле теории распределений. Отпадает также и предположение о том, что начальные данные u_0 и u_1 являются функциями от x, дифференцируемыми достаточное число раз.)

Вычислим энергию движения. Поскольку энергия не зависит от t, ее можно вычислять при $t=0$. Имеем

$$E=\frac{1}{2}\int_0^L\left(\frac{1}{v^2}u_1^2+u_0'^2\right)dx. \qquad \text{(VII, 1; 115)}$$

В силу формулы Парсеваля эта величина равна сумме ряда

$$E=\frac{L}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\left(B_k^2\frac{k^2\pi^2}{L^2}+A_k^2\frac{k^2\pi^2}{L^2}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{4L}k^2\left(A_k^2+B_k^2\right). \qquad \text{(VII, 1; 116)}$$

Общий член последнего ряда в точности равен энергии E_k k-го стационарного движения u_k, входящего в u $\left(u=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k\right)$. Иначе говоря,

$$\left.\begin{aligned}u(x,t)&=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x,t),\\ E&=\sum_{k=1}^{\infty}E_k.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII, 1; 117)}$$

Итак, *полная энергия движения равна сумме полных энергий стационарных движений, на которые оно распадается.*

Этот факт не является очевидным, ибо энергия не линейна, а квадратична; он связан с ортогональностью функций $\sin k\pi\frac{x}{L}$ и $\cos k\pi\frac{x}{L}$ или же с формулой Парсеваля. Заметим, что энергия E_k стационарной волны пропорциональна $A_k^2+B_k^2$ и k^2, т. е. пропорциональна квадрату ее амплитуды и квадрату ее частоты. Заметим также, что здесь можно вновь доказать постоянство энергии во времени. Если записать энергию E в момент t в виде интеграла, то этот интеграл снова можно будет вычислить по формуле Парсеваля. Однако теперь понадобятся коэффициенты в разложениях Фурье функций $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$ по функ-

циям $\sin k\pi \frac{x}{L}$ и $\cos k\pi \frac{x}{L}$ в момент времени t. Это сводится к замене чисел A_k и B_k числами

$$\left.\begin{aligned} A_k' &= A_k \cos k\pi \frac{vt}{L} + B_k \sin k\pi \frac{vt}{L}, \\ B_k' &= - A_k \sin k\pi \frac{vt}{L} + B_k \cos k\pi \frac{vt}{L}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII, 1; 118)}$$

Но ведь

$$A_k'^2 + B_k'^2 = A_k^2 + B_k^2, \qquad \text{(VII, 1; 119)}$$

и, значит, энергия остается постоянной.

Часто говорят, что стационарные составляющие u_k, которые входят в u, „физически реальны". Под этим понимают, что простые физические приборы (резонаторы с заданными частотами) позволяют разложить любое движение u на его составляющие u_k. Это — факт большой практической важности.

Задача Коши для открытой акустической трубы

Считают, что на открытом конце трубы *давление* постоянно; согласно третьему уравнению (VII, 1; 36), это означает, что выполняются условия

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t) \equiv \frac{\partial u}{\partial x}(L,\ t) \equiv 0.$$

Это — новый тип краевых условий (см. стр. 303). [Если вместо u принять за неизвестную функцию давление p, то оно также будет удовлетворять уравнению колебаний струны, но при краевых условиях $p(0,\ t) = p_1$ и $p(L,\ t) = p_2$. Если положить $\pi = p - p_1 - \frac{x}{L}(p_2 - p_1)$, то для функции π снова получится уравнение колебаний струны с краевыми условиями $\pi(0,\ t) \equiv \pi(L,\ t) \equiv 0$, что представляет собой только что решенную задачу.] Стационарные волны удовлетворяют прежним уравнениям (VII, 1; 99). Краевые условия $U'(0) = U'(L) = 0$ снова приводят к равенству (VII, 1; 102) при $\lambda \neq 0$ и дают в качестве решения U функцию

$$U(x) = \cos k\pi \frac{x}{L} \qquad \text{(VII, 1; 120)}$$

с точностью до постоянного множителя.

По уже отмеченным причинам мы можем ограничиться случаем $\lambda > 0$.

Однако случай $\lambda = 0$ также приводит здесь к стационарной волне, ибо решение вида (VII, 1; 104) будет удовлетворять краевым условиям $U'(0) = U'(L) = 0$, если оно сводится к произвольной *постоянной*; это равносильно использованию функции (VII, 1; 120) и при $k = 0$. При выбранном числе k общее решение первого из уравнений (VII, 1; 99) снова имеет

вид (VII, 1; 105), если $k \neq 0$. При $k = 0$ оно имеет вид

$$V(t) = At + B. \qquad \text{(VII, 1; 121)}$$

Окончательно находим, что стационарные волны при $k \neq 0$ имеют вид

$$u_k(x, t) = \cos k\pi \frac{x}{L} \left(A \cos k\pi \frac{vt}{L} + B \sin k\pi \frac{vt}{L} \right). \qquad \text{(VII, 1; 122)}$$

Их частоты и длины волн совпадают с частотами и длинами волн для колеблющейся струны с закрепленными концами (что не удивительно, поскольку

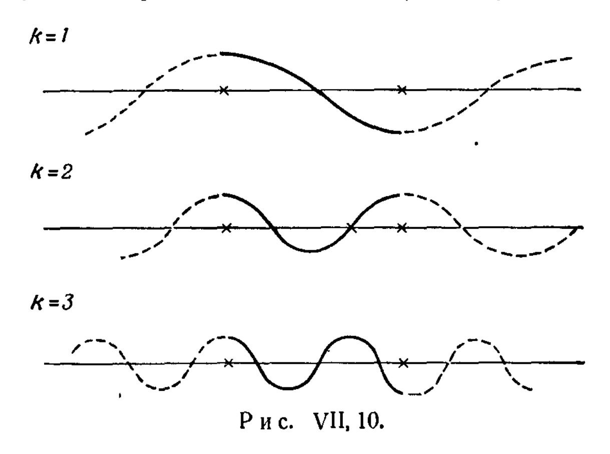


Рис. VII, 10.

модифицированное давление π при этом также стационарно и удовлетворяет краевым условиям для колеблющейся струны). Однако функция $U(x)$, продолженная на всю прямую (т. е. косинус), имеет теперь иную форму.

При $k = 0$ стационарная волна имеет вид

$$u_0(x, t) = At + B \qquad \text{(VII, 1; 123)}$$

и не является периодической (если $A \neq 0$).

Решение u задачи Коши ищут далее в виде комбинации стационарных волн, что сводится к разложению функций u_0 и u_1 в ряд по $\cos k\pi \frac{x}{L}$. Это разложение возможно, ибо если продолжить u_0 и u_1 сначала симметрично относительно точки 0, а затем периодично с периодом $2L$, то разложения Фурье продолженных функций по периодическим функциям $\cos k\pi \frac{x}{L}$ и $\sin k\pi \frac{x}{L}$ с периодом $2L$ будут содержать только члены с косинусами в силу четности

продолженных функций. Окончательно

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\pi \frac{x}{L} \left[\left(\cos k\pi \frac{vt}{L} \right) \frac{2}{L} \int_0^L u_0(\xi) \cos k\pi \frac{\xi}{L} d\xi + \right.$$

$$\left. + \left(\sin k\pi \frac{vt}{L} \right) \frac{2}{k\pi v} \int_0^L u_1(\xi) \cos k\pi \frac{\xi}{L} d\xi \right] + \frac{1}{L} \int_0^L u_0(\xi) d\xi + \frac{t}{L} \int_0^L u_1(\xi) d\xi. \quad \text{(VII, 1; 124)}$$

Член, непериодический по t, соответствует переносу в целом массы газа, которая входит в один конец трубы и выходит из другого.

Средняя скорость *циркуляции* газа в трубе дается, таким образом, формулой

$$V_0 = \frac{1}{L} \int_0^L u_1(\xi) d\xi. \quad \text{(VII, 1; 125)}$$

Мы вновь пришли к результату, полученному на стр. 304 [см. формулу (VII, 1; 79)]. Конечно, эта скорость не имеет *никакого отношения* к *скорости распространения волн* v; известно, что распространение волны не сопровождается переносом вещества. Энергия E снова будет суммой энергий E_k, включая сюда E_0.

Задача Коши для закрытой трубы

Закрытой трубой называют трубу, закрытую с одного конца и открытую с другого. Через открытый конец в трубу вдувается воздух, который покидает ее через расположенное вблизи отверстие; столб воздуха, заключенный в трубе, приводится в незатухающие колебания.

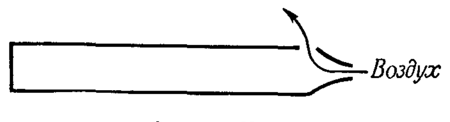


Рис. VII, 11.

Предположим, что конец трубы $x = 0$ закрыт, а конец $x = L$ — открыт. Краевые условия на этот раз будут следующими:

$$u(0, t) \equiv 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) \equiv 0.$$

Стационарные волны по-прежнему определяются уравнениями (VII, 1; 99), однако функция U должна теперь удовлетворять условиям $U(0) = 0$, $U'(L) = 0$. Отсюда вытекает, что λ — вещественное положительное число ($\lambda > 0$). [Ибо

если $\lambda < 0$, то cos и sin превращаются в ch и sh; условие $U(0) = 0$ показывает, что речь идет о гиперболическом синусе, но тогда U' будет гиперболическим косинусом, который не обращается в нуль ни при каких вещественных значениях переменного. Число λ не может также равняться нулю, ибо тогда $U = Ax + B$. Из условия $U(0) = 0$ получаем $B = 0$, а из условия $U'(L) = 0$ получаем $A = 0$.]

Итак, функция U является некоторым синусом, U' — косинусом, а условие $U'(L) = 0$ записывается в виде

$$\cos \sqrt{\lambda} L = 0, \tag{VII, 1; 126}$$

откуда

$$\sqrt{\lambda} L = k\pi + \frac{\pi}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}. \tag{VII, 1; 127}$$

С точностью до постоянного множителя функция $U(x)$ имеет вид

$$U(x) = \sin(2k+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{L}. \tag{VII, 1; 128}$$

Можно ограничиться целыми неотрицательными значениями k ($k \geqslant 0$), ибо числа k и $-(k+1)$ дают функции $U(x)$, отличающиеся знаком.

Стационарные движения, соответствующие данному k, даются формулой

$$u_k(x, t) = \sin(2k+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{L} \times \\ \times \left[A\cos(2k+1)\frac{\pi}{2}\frac{vt}{L} + B\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}\frac{vt}{L}\right]. \tag{VII, 1; 129}$$

Период T, частота N и длина волны Λ определяются соотношениями

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{4L}{(2k+1)v}, & N &= (2k+1)\frac{v}{4L}, \\ \Lambda &= \frac{4L}{2k+1}, & L &= (2k+1)\frac{\Lambda}{4}. \end{aligned}\right\} \tag{VII, 1; 130}$$

При изменяющемся k частоты принимают только значения, равные *нечетным кратным* основной частоты $N_0 = \frac{v}{4L}$, которая в свою очередь равна половине основной частоты открытой трубы, имеющей ту же самую длину.

Длина трубы равна нечетному кратному от четверти длины волны. Продолженная на всю прямую функция $U(x)$ (т. е. синус) имеет форму, указанную на рис. VII, 12. Если искать решение задачи Коши в виде линейной комбинации стационарных волн, то приходится разлагать функции u_0 и u_1 по функциям $\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{L}$. Для этой цели функции u_0 и u_1 продолжают сначала на отрезок $(-L, 0)$ антисимметрически (нечетно), затем на от-

резок $(L, 3L)$ симметрично относительно точки $x = L$ и, наконец, периодически с периодом $4L$ на всю ось. Продолженные функции могут быть разложены по периодическим функциям $\cos m \frac{\pi}{2} \frac{x}{L}$ и $\sin m \frac{\pi}{2} \frac{x}{L}$ с периодом $4L$. Но, поскольку продолженные функции нечетны, в этом разложении остаются только члены

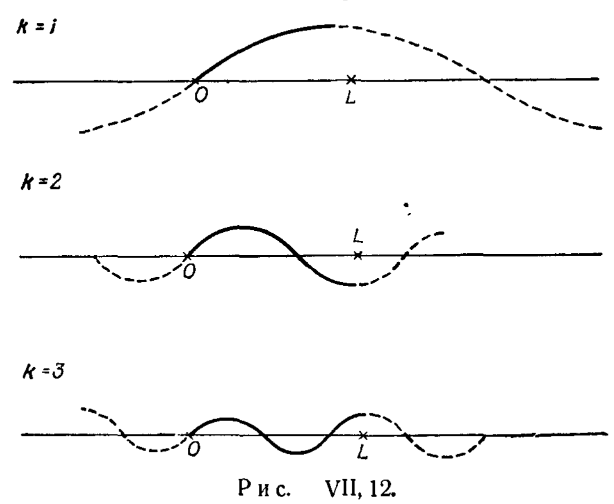


Рис. VII, 12.

с синусами; а, поскольку продолженные функции симметричны относительно точки $x = L$, среди членов с синусами остаются только те, у которых m нечетно $(m = 2k + 1)$.

Таким образом, имеем решение

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sin(2k+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{L} \times$$
$$\times \left[\left(\cos(2k+1)\frac{\pi}{2}\frac{vt}{L}\right)\frac{2}{L}\int_0^L u_0(\xi)\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}\frac{\xi}{L}\,d\xi + \right.$$
$$\left. + \left(\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}\frac{vt}{L}\right)\frac{2}{(2k+1)\frac{\pi}{2}v}\int_0^L u_1(\xi)\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}\frac{\xi}{L}\,d\xi\right]. \quad \text{(VII, 1; 131)}$$

И снова

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} E_k.$$

§ 2. Уравнение колебаний мембраны и волновое уравнение в трехмерном пространстве

Рассмотрим малые поперечные колебания однородной мембраны. Отклонение мембраны, нормальное к плоскости равновесия [которую мы примем за плоскость (x, y)], будет функцией $u(x, y, t)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad \text{(VII, 2; 1)}$$

где

$$v=\sqrt{\frac{F}{\rho}}, \qquad \text{(VII, 2; 2)}$$

где в свою очередь F — поверхностное натяжение мембраны, а ρ — поверхностная плотность; величина v имеет размерность скорости.

Уравнение (VII, 2; 1) мы будем называть *уравнением колебаний мембраны. Волновым уравнением* мы назовем уравнение

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad \text{(VII, 2; 3)}$$

в трехмерном пространстве.

В данном параграфе мы собираемся изучить уравнения (VII, 2; 1) и (VII, 2; 3). Для упрощения записи положим

$$\Box_2=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad \text{(VII, 2; 4)}$$

и

$$\Box_3=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad \text{(VII, 2; 5)}$$

1. Решение уравнения мембраны и волнового уравнения в трехмерном пространстве методом распространяющихся волн. Задачи Коши. Вернемся к уравнению (VII, 1; 37). Обозначим через (C) волновой конус будущего в плоскости (x, t):

$$\left.\begin{aligned} v^2t^2-x^2 &\geqslant 0,\\ t &\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII, 2; 6)}$$

Пусть функция $E(x, t)$ определяется формулой

$$E(x, t)=\begin{cases} \dfrac{v}{2} & \text{в } (C),\\ 0 & \text{вне } (C). \end{cases} \qquad \text{(VII, 2; 7)}$$

Простая выкладка показывает, что

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}=\delta \qquad \text{(VII, 2; 8)}$$

в смысле теории распределений.

Иначе говоря, функция $E(x, t)$, определенная равенством (VII, 2; 7), является элементарным решением для оператора

$$\square_1=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}. \qquad \text{(VII, 2; 9)}$$

Пусть теперь $f(\xi)$ — достаточно регулярная функция переменного ξ. Положим

$$I(x, t; f)=\frac{1}{v^2}\int_{-\infty}^{\infty}E(x-\xi, t)f(\xi)\,d\xi=\frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt}f(\xi)\,d\xi. \qquad \text{(VII, 2; 10)}$$

З а м е ч а н и е. Предыдущий интеграл на самом деле является сверткой по ξ при фиксированном t функций $E(\xi, t)$ и $f(\xi)$.

Легко проверить, что при любой (достаточно регулярной) функции f интеграл $I(x, t; f)$ будет решением уравнения (VII, 1; 37) и что решение (VII, 1; 48) задачи Коши (VII, 1; 44) есть не что иное, как

$$u(x, t)=I(x, t; u_1)+\frac{\partial}{\partial t}I(x, t; u_0). \qquad \text{(VII, 2; 11)}$$

Мы хотим воспользоваться идентичным методом, чтобы изучить уравнение (VII, 2; 3).

Элементарное решение для оператора $\square_3$

Обозначим через (Γ) волновой конус будущего

$$v^2t^2-(x^2+y^2+z^2)\geqslant 0, \quad t\geqslant 0, \qquad \text{(VII, 2; 12)}$$

в пространстве R^4.

Через Σ обозначим его поверхность.

Пусть $E(x, y, z, t)$ — распределение с носителем Σ, задаваемое формулой

$$\langle E, \varphi\rangle=\int_0^{\infty}\frac{dt}{4\pi t}\iint_{x^2+y^2+z^2=v^2t^2}\varphi(x, y, z, t)\,dS. \qquad \text{(VII, 2; 13)}$$

Внутренний интеграл берется по сфере с центром в начале координат (пространства (x, y, z)) и радиусом vt, лежащей в гиперплоскости на уровне t; dS обозначает элемент поверхности сферы.

Положим

$$\bar{\varphi}(s, t)=\frac{1}{4\pi s^2}\iint_{x^2+y^2+z^2=s^2}\varphi(x, y, z, t)\,dS \qquad \text{(VII, 2; 14)}$$

[при фиксированном t функция $\overline{\varphi}(s, t)$ является средним от функции

$$(x, y, z) \to \varphi(x, y, z, t)$$

по сфере с центром O радиуса s, лежащей в гиперплоскости на уровне t].

Тогда будем иметь

$$\overline{\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}} = \frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial t^2} \tag{VII, 2; 15}$$

и

$$\overline{\Delta\varphi} = \Delta\overline{\varphi} = \frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial s^2} + \frac{2}{s}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial s} \tag{VII, 2; 16}$$

[ср. с формулой (II, 2; 59)].

Формула (VII, 2; 13) запишется теперь в виде

$$\langle E, \varphi\rangle = \int_0^\infty v^2 t\overline{\varphi}(vt, t)\,dt. \tag{VII, 2; 17}$$

Принимая во внимание равенства (VII, 2; 15) и (VII, 2; 16), будем иметь

$$\langle\Box_3 E, \varphi\rangle = \langle E, \Box_3\varphi\rangle = \frac{1}{v^2}\left\langle E, \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right\rangle - \langle E, \Delta\varphi\rangle =$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{1}{v^2} v^2 t\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial t^2} - v^2 t\left(\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial s^2} + \frac{2}{s}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial s}\right)_{s=vt}\right] dt =$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(sv\overline{\varphi}) - \frac{\partial^2}{\partial s^2}(sv\overline{\varphi})\right]_{s=vt} dt. \tag{VII, 2; 18}$$

Но

$$\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\right)_{s=vt} = \frac{1}{v}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{1}{v}\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial s}\right)_{s=vt}\right] \tag{VII, 2; 19}$$

и, следовательно,

$$\langle E, \Box_3\varphi\rangle = \int_0^\infty \frac{1}{v}\frac{d}{dt}\left[\left\{\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}(sv\overline{\varphi}) - \frac{\partial}{\partial s}(sv\overline{\varphi})\right\}_{s=vt}\right] dt =$$

$$= \frac{1}{v}\left[\left\{\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}(sv\overline{\varphi}) - \frac{\partial}{\partial s}(sv\overline{\varphi})\right\}_{s=vt}\right]_{t=0}^{t=\infty}. \tag{VII, 2; 20}$$

Поскольку функция $\varphi(x, y, z, t)$ имеет ограниченный носитель, последнее выражение равно

$$-\left[\frac{1}{v^2} vs\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial t} - \frac{1}{v}\left(v\overline{\varphi} + sv\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial s}\right)\right]_{s=t=0} = \overline{\varphi}(0, 0) = \varphi(0, 0, 0, 0) = \langle\delta, \varphi\rangle. \tag{VII, 2; 21}$$

Отсюда вытекает, что распределение $E(x, y, z, t)$, определенное равенством (VII, 2; 13), является элементарным решением для оператора $\square_3$.

Решение задачи Коши для волнового уравнения в трехмерном пространстве

Задача Коши состоит здесь в следующем: отыскать решение дифференциального уравнения (VII, 2; 3), удовлетворяющее данным начальным условиям:

$$\left.\begin{aligned} u(x, y, z, 0) &= u_0(x, y, z), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, 0) &= u_1(x, y, z). \end{aligned}\right\} \quad \text{(VII, 2; 22)}$$

Мы хотим получить явное решение этой задачи.

Допустим, что оно единственно.

Покажем сначала, что интеграл

$$I(x, y, z, t; f) = \frac{1}{v^2} \int\int_{R^3}\int E(x-\xi, y-\eta, z-\zeta, t) f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{4\pi v^2 t} \int\int_{\gamma(x, y, z;\ vt)} f(\xi, \eta, \zeta)\, dS \quad \text{(VII, 2; 23)}$$

является решением уравнения (VII, 2; 3) при любой достаточно регулярной функции f. Здесь $\gamma(x, y, z; vt)$ — сфера с центром (x, y, z) и радиусом vt, лежащая в гиперплоскости на уровне t.

Равенство (VII, 2; 23) можно записать в виде

$$I(x, y, z, t; f) = \frac{1}{4\pi v^2 t} \int\int_{\gamma(0, 0, 0;\ vt)} f(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)\, dS \quad \text{(VII, 2; 24)}$$

и, следовательно,

$$\Delta I(x, y, z, t; f) = I(x, y, z, t; \Delta f). \quad \text{(VII, 2; 25)}$$

Кроме того,

$$I(x, y, z, t; f) = t\overline{f}(vt), \quad \text{(VII, 2; 26)}$$

где $\overline{f}(r)$ — среднее от функции f по сфере с центром (x, y, z) радиуса r. Будем рассматривать $\overline{f}(r)$ как функцию только от r. Если записать r как расстояние до начала координат в R^3, то $\overline{f}(r)$ станет функцией на R^3, от которой можно взять лапласиан по классической формуле (II, 2; 50). Последовательно дифференцируя, получим

$$\frac{\partial I}{\partial t}(x, y, z, t; f) = \overline{f}(vt) + vt\overline{f}'(vt) \quad \text{(VII, 2; 27)}$$

и

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}(x, y, z, t; f) = 2v\bar{f}'(vt) + v^2 t\bar{f}''(vt) =$$
$$= v^2 t\left(\frac{2}{vt}\bar{f}'(vt) + \bar{f}''(vt)\right) = v^2 t\,\Delta\bar{f}(vt) =$$
$$= v^2 t\,\overline{\Delta f}(vt) = v^2 I(x, y, z, t; \Delta f). \qquad \text{(VII, 2; 28)}$$

Формулы (VII, 2; 25) и (VII, 2; 28) показывают, что интеграл $I(x, y, z, t; f)$ является решением уравнения (VII, 2; 3).

Мы видим, что при $t \to 0$ справедливы соотношения

$$I(x, y, z, t; f) \to 0 \qquad \text{(VII, 2; 29)}$$

[в силу (VII, 2; 26)],

$$\frac{\partial I}{\partial t}(x, y, z, t; f) \to \bar{f}(0) = f(x, y, z) \qquad \text{(VII, 2; 30)}$$

[в силу (VII, 2; 27)],

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}(x, y, z, t; f) \to 0 \qquad \text{(VII, 2; 31)}$$

[в силу (VII, 2; 28)].

Теперь легко проверить, что функция

$$u(x, y, z, t) = I(x, y, z, t; u_1) + \frac{\partial}{\partial t}I(x, y, z, t; u_0) \qquad \text{(VII, 2; 32)}$$

будет решением задачи Коши (VII, 2; 22). В самом деле, при $t \to 0$ имеем

$$I(x, y, z, t; u_1) \to 0 \qquad \text{(VII, 2; 33)}$$

[в силу (VII, 2; 29)],

$$\frac{\partial}{\partial t}I(x, y, z, t; u_0) \to u_0(x, y, z) \qquad \text{(VII, 2; 34)}$$

[в силу (VII, 2; 30)], и, следовательно, функция $u(x, y, z, t)$, задаваемая формулой (VII, 2; 32), стремится к $u_0(x, y, z)$.

Кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial t}I(x, y, z, t; u_1) \to u_1(x, y, z) \qquad \text{(VII, 2; 35)}$$

[в силу (VII, 2; 30)] и

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}I(x, y, z, t; u_0) \to 0 \qquad \text{(VII, 2; 36)}$$

[в силу (VII, 2; 31)]. Следовательно, производная $\frac{\partial}{\partial t}u(x, y, z, t)$ стремится к $u_1(x, y, z)$, когда $t \to 0$.

Ч. и т. д.

Запишем формулу (VII, 2; 32) подробней:

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi v^2 t} \iint\limits_{\gamma(x, y, z; vt)} u_1(\xi, \eta, \zeta)\, dS + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi v^2 t} \iint\limits_{\gamma(x, y, z; vt)} u_0(\xi, \eta, \zeta)\, dS\right). \quad \text{(VII, 2; 37)}$$

Решение задачи Коши для уравнения колебаний мембраны. Метод спуска

Пусть $g(\xi, \eta)$ — достаточно регулярная функция двух переменных ξ и η.

Если ее рассматривать, как функцию от трех переменных ξ, η и ζ, то она будет независима от ζ и ее можно будет записать в виде

$$g(\xi, \eta) = g(\xi, \eta) \otimes 1_\zeta = \tilde{g}(\xi, \eta, \zeta). \quad \text{(VII, 2; 38)}$$

Вычислим с помощью формулы (VII, 2; 23) интеграл $I(x, y, z, t; \tilde{g})$:

$$I(x, y, z, t; \tilde{g}) = \frac{1}{4\pi v^2 t} \iint\limits_{\gamma(x, y, z; vt)} (g(\xi, \eta) \otimes 1_\zeta)\, dS. \quad \text{(VII, 2; 39)}$$

При дальнейших выкладках полезно обратиться к рис. VII, 13. Интеграл, который стоит в правой части равенства (VII, 2; 39), не зависит от z и можно написать

$$I(x, y, z, t; \tilde{g}) = I(x, y, 0, t; \tilde{g}) = \frac{1}{4\pi v^2 t} \iint\limits_{\gamma(x, y, 0; vt)} (g(\xi, \eta) \otimes 1_\zeta)\, dS. \quad \text{(VII, 2; 40)}$$

Обозначим через $\bar{g}(\rho)$ среднее функции $g(\xi, \eta)$ по окружности C [в плоскости (ξ, η)] с центром $\omega = (x, y)$ и радиусом ρ; $0 \leqslant \rho \leqslant vt$. Тогда $\bar{g}(\rho)$ будет также средним функции $\tilde{g}(\xi, \eta, \zeta)$ по любой из двух параллелей C_1 и C_2 радиуса ρ, лежащих на сфере $\gamma(x, y, 0; vt)$.

Обозначим через $\overrightarrow{\omega n_1}$ внешнюю нормаль к сфере в какой-либо точке параллели C_1 и положим

$$\psi = \widehat{\overrightarrow{0\zeta}, \overrightarrow{\omega n_1}}. \quad \text{(VII, 2; 41)}$$

Имеем

$$\rho = vt \sin\psi, \quad \text{(VII, 2; 42)}$$

откуда

$$d\psi = \frac{d\rho}{\sqrt{v^2t^2 - \rho^2}}. \quad \text{(VII, 2; 43)}$$

Поскольку

$$\iint\limits_{\gamma(x,\,y,\,0;\,vt)} (g(\xi,\ \eta)\otimes 1_\zeta)\,dS = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} vt\,d\psi\,(2\pi\rho\bar{g}(\rho)), \qquad \text{(VII, 2; 44)}$$

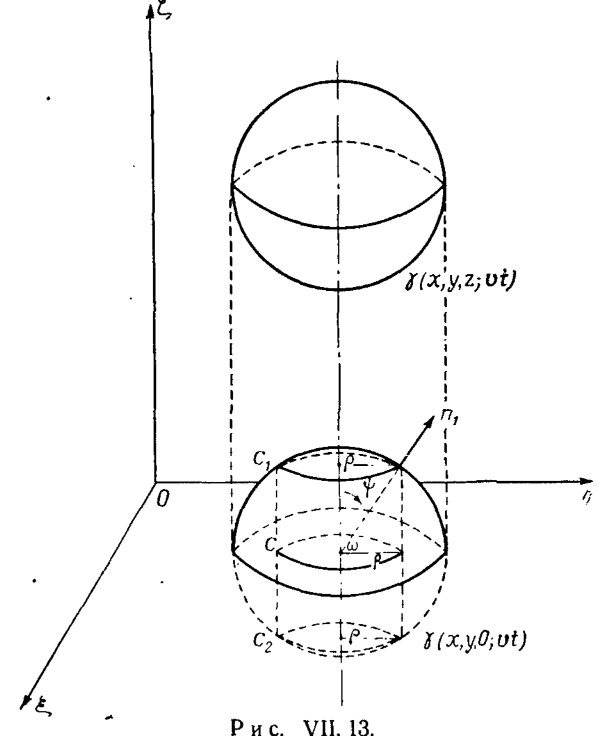


Рис. VII, 13.

окончательно будем иметь

$$I(x,\ y,\ z,\ t;\ \tilde{g}) = \frac{1}{v}\int\limits_0^{vt} \frac{\bar{g}(\rho)}{\sqrt{v^2t^2-\rho^2}}\,\rho\,d\rho. \qquad \text{(VII, 2; 45)}$$

Это выражение зависит только от x, y, t и g. Положим поэтому

$$J(x,\ y,\ t;\ g) = I(x,\ y,\ z,\ t;\ \tilde{g}) = \frac{1}{v}\int\limits_0^{vt} \frac{\bar{g}(\rho)}{\sqrt{v^2t^2-\rho^2}}\,\rho\,d\rho. \qquad \text{(VII, 2; 46)}$$

Для любой достаточно регулярной функции $g(\xi, \eta)$ интеграл $J(x, y, t; g)$ будет решением уравнения колебаний мембраны (VII, 2; 1).

В самом деле, согласно исследованию уравнения (VII, 2; 3), мы знаем, что выполняется соотношение

$$\Box_3 I(x, y, z, t; \tilde{g}) = 0. \qquad \text{(VII, 2; 47)}$$

Поскольку, с другой стороны, для функции g двух переменных ξ и η интеграл $I(x, y, z, t; \tilde{g})$ не зависит от z, имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} I(x, y, z, t; \tilde{g}) = 0 \qquad \text{(VII, 2; 48)}$$

и, следовательно,

$$\Box_3 I(x, y, z, t; \tilde{g}) = \Box_2 I(x, y, z, t; \tilde{g}) = 0, \qquad \text{(VII, 2; 49)}$$

откуда

$$\Box_2 J(x, y, t; g) = \Box_2 I(x, y, z, t; \tilde{g}) = 0. \qquad \text{(VII, 2; 50)}$$

Задача Коши для уравнения колебаний мембраны состоит в том, чтобы отыскать решение уравнения (VII, 2; 1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, 0) &= u_0(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) &= u_1(x, y). \end{aligned} \right\} \qquad \text{(VII, 2; 51)}$$

Решение задачи (VII, 2; 51) дается формулой

$$u(x, y, t) = J(x, y, t; u_1) + \frac{\partial}{\partial t} J(x, y, t; u_0). \qquad \text{(VII, 2; 52)}$$

В самом деле, положим

$$\tilde{u}_0(\xi, \eta, \zeta) = u_0(\xi, \eta) \otimes 1_\zeta \qquad \text{(VII, 2; 53)}$$

и

$$\tilde{u}_1(\xi, \eta, \zeta) = u_1(\xi, \eta) \otimes 1_\zeta, \qquad \text{(VII, 2; 54)}$$

тогда равенство (VII, 2; 52) запишется в виде

$$u(x, y, t) = I(x, y, z, t; \tilde{u}_1) + \frac{\partial}{\partial t} I(x, y, z, t; \tilde{u}_1). \qquad \text{(VII, 2; 55)}$$

Отсюда сразу же следует, что при $t \to 0$ выполняются соотношения

$$u(x, y, t) \to \tilde{u}_0(x, y, z) = u_0(x, y) \qquad \text{(VII, 2; 56)}$$

в силу (VII, 2; 33) и (VII, 2; 34) и

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, y, t) \to \tilde{u}_1(x, y, z) = u_1(x, y) \qquad \text{(VII, 2; 57)}$$

в силу (VII, 2; 35) и (VII, 2; 36).

Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{2\pi v} \iint\limits_{D(x, y;\, vt)} \frac{g(\xi, \eta)}{\sqrt{v^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta \qquad \text{(VII, 2; 58)}$$

для достаточно регулярной функции $g(\xi, \eta)$. Здесь $D(x, y; vt)$ — диск с центром (x, y) и с радиусом vt.

Положим

$$\left.\begin{aligned} x - \xi &= \rho \cos\theta, \\ y - \eta &= \rho \sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII, 2; 59)}$$

Тогда интеграл (VII, 2; 58) запишется в виде

$$\frac{1}{2\pi v} \int_0^{vt} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{v^2t^2 - \rho^2}} \int_0^{2\pi} g(\xi, \eta)\, d\theta.$$

Но интеграл $\int_0^{2\pi} g(\xi, \eta)\, d\theta$ есть не что иное, как $2\pi\bar{g}(\rho)$. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi v} \iint\limits_{D(x, y;\, vt)} \frac{g(\xi, \eta)}{\sqrt{v^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta = J(x, y, t; g). \qquad \text{(VII, 2; 60)}$$

Поэтому решение (VII, 2; 52) задачи Коши (VII, 2; 51) для уравнения колебаний мембраны записывается в виде

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi v} \left\{ \iint\limits_{D(x, y;\, vt)} \frac{u_1(\xi, \eta)}{\sqrt{v^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{D(x, y;\, vt)} \frac{u_0(\xi, \eta)}{\sqrt{v^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta \right\}. \qquad \text{(VII, 2; 61)}$$

Мы примем без доказательства, что задача Коши (VII, 2; 51) имеет единственное решение, даваемое формулой (VII, 2; 61).

Замечания. 1. В случае волн в трехмерном пространстве значение функции u [даваемое формулой (VII, 2; 37)] в точке (x, y, z) в момент времени t зависит только от значений u_0 и u_1 в момент $t = 0$ функций

u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ на сфере с центром (x, y, z) и с радиусом vt. Здесь нет диффузии волн.

Напротив, в случае волн в двумерном пространстве значение функции u [даваемое формулой (VII, 2; 61)] в точке (x, y) в момент времени t зависит от начальных значений u_0 и u_1 во всем диске с центром (x, y) и радиусом vt. Здесь имеется диффузия волн.

2. *Случай волн в трехмерном пространстве.* Пусть (x, y, z, t) — точка в пространстве R^4. Волновым конусом прошлого для этой точки называется конус

$$\left.\begin{array}{l} v^2(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-(z-\zeta)^2 \geqslant 0, \\ t \geqslant \tau, \end{array}\right\}$$

а волновым конусом будущего — конус

$$\left.\begin{array}{l} v^2(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-(z-\zeta)^2 \geqslant 0, \\ t \leqslant \tau. \end{array}\right\}$$

Пусть вместо того, чтобы решать задачу Коши для начального момента O, мы хотим решить ее для начального момента t_0 [иными словами, пусть нам надо найти решение уравнения (VII, 2; 3), удовлетворяющее условиям: $u(x, y, z, t_0)=u_0(x, y, z)$ и $\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, t_0)=u_1(x, y, z)$]. Легко видеть, что в этом случае формулу (VII, 2; 32), дающую функцию $u(x, y, z, t)$, следует заменить формулой

$$u(x, y, z, t)=I(x, y, z, t-t_0; u_1)+\frac{\partial}{\partial t} I(x, y, z, t-t_0; u_0)$$

при $t>t_0$ или формулой

$$u(x, y, z, t)=-\left[I(x, y, z, t_0-t; u_1)+\frac{\partial}{\partial t} I(x, y, z, t_0-t; u_0)\right]$$

при $t<t_0$.

Преобразуя эти выражения с помощью равенства (VII, 2; 23), мы видим, что то, что происходит в момент времени $t>t_0$ в точке (x, y, z), зависит только от того, что происходило в момент времени t_0 на *поверхности* сферы $\gamma(x, y, z; v(t-t_0))$, представляющей собой пересечение *поверхности* волнового конуса прошлого для точки (x, y, z, t) с гиперплоскостью $\tau=t_0$.

Если же $t<t_0$, то мы видим, что то, что происходит в момент времени t в точке (x, y, z), зависит только от того, что будет происходить на *поверхности* сферы $\gamma(x, y, z; v(t_0-t))$, представляющей собой пересечение гиперплоскости $\tau=t_0$ с поверхностью волнового конуса будущего для точки (x, y, z, t).

Случай волн в двумерном пространстве. Пусть (x, y, t) — точка в пространстве R^3. Волновым конусом прошлого (соответственно будущего) для этой точки называется конус

$$v^2(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2 \geqslant 0, \quad t \geqslant \tau,$$

[соответственно конус

$$v^2(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2 \geqslant 0, \quad t \leqslant \tau].$$

Если решать задачу Коши для начального момента t_0, то решение $u(x, y, t)$ дается формулой

$$u(x, y, t)=J(x, y, t-t_0; u_1)+\frac{\partial}{\partial t} J(x, y, t-t_0; u_1),$$

если $t > t_0$, или же формулой

$$u(x, y, t)=-\left[J(x, y, t_0-t; u_1)+\frac{\partial}{\partial t} J(x, y, t_0-t; u_1)\right],$$

если $t < t_0$.

Используя равенство (VII, 2; 60), мы видим, что то, что происходит в момент времени $t > t_0$ в точке (x, y), зависит только от того, что происходило в момент времени t_0 *во всем диске* $D(x, y; v(t-t_0))$, представляющем собой пересечение плоскости $\tau=t_0$ с волновым конусом прошлого для точки (x, y, t). Если же $t < t_0$, то мы видим, что то, что происходит в точке (x, y) в момент времени t, зависит только от того, что будет происходить в момент t_0 *во всем диске* $D(x, y; v(t_0-t))$, представляющем собой пересечение плоскости $\tau=t_0$ с волновым конусом будущего для точки (x, y, t).

Мембрана с краем В задаче Коши (VII, 2; 51) мы предположили, что мембрана не ограничена; функции u_0 и u_1 были определены во всей плоскости (x, y).

Предположим теперь, что мембрана имеет края, т. е. предположим, что в состоянии покоя она занимает некоторую область G с границей Γ[1]).

Задача Коши состоит здесь в указании

а) начальных значений

$$\left.\begin{aligned} u_0(x, y) &= u(x, y, 0), \\ u_1(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII, 2; 62)}$$

для точек $(x, y) \in G$ и

---

[1]) Смещение границы Г с волновым конусом будущего исключено.

b) краевых условий; мы будем заниматься здесь только *краевыми условиями Дирихле*:

$$u(x, y, t) \equiv 0 \qquad \text{(VII, 2; 63)}$$

для точек (x, y) границы Γ в течение всего времени.

Решение задачи начинают, если это возможно, с такого продолжения функций u_0 и u_1 до функций $\bar{u}_0$ и $\bar{u}_1$, чтобы решение $u(x, y, t)$, даваемое формулой (VII, 2; 60) с заменой u_0 и u_1 на $\bar{u}_0$ и $\bar{u}_1$, обращалось в нуль в любой точке $(x, y) \in \Gamma$ при всех значениях t.

Тогда для любой точки (x, y, t) значение $u(x, y, t)$ дается формулой

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi v}\left\{ \iint\limits_{D(x,y;vt)} \frac{\bar{u}_1(\xi, \eta)}{\sqrt{v^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta + \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{D(x,y;vt)} \frac{\bar{u}_0(\xi, \eta)}{\sqrt{v^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta \right\}. \qquad \text{(VII, 2; 64)}$$

П р и м е р: G — полуплоскость $x > 0$, Γ — ось $x = 0$. Полагаем

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_0(x, y) &= -u_0(-x, y), \\ \bar{u}_1(x, y) &= -u_1(-x, y) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII, 2; 65)}$$

при $x < 0$.

(Этот случай, очевидно, обобщает случай струны с одним закрепленным концом.)

В случае, когда область G не ограничена, мы примем без доказательства единственность решения.

Для ограниченной области G эту единственность мы сейчас докажем.

Интеграл энергии. Единственность в задаче Коши

Предположим, что область G ограничена и что ее границей является замкнутая кривая Γ. (Этот случай наиболее важен на практике.) Умножая равенство (VII, 2; 1) на $\frac{\partial u}{\partial t}$ и интегрируя по G, получим

$$\frac{d}{dt} \iint\limits_G \frac{1}{2v^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\, dy = \iint\limits_G \Delta u \,\frac{\partial u}{\partial t}\, dx\, dy. \qquad \text{(VII, 2; 66)}$$

Интегрируя правую часть по частям и используя условие (VII, 2; 63), получим

$$\frac{d}{dt} \iint\limits_G \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} dx\, dy = 0. \qquad \text{(VII, 2; 67)}$$

Интегралом энергии служит здесь

$$E=\frac{1}{2}\iint\limits_G \left\{\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy. \qquad \text{(VII, 2; 68)}$$

Согласно равенству (VII, 2; 67), энергия остается постоянной во времени.

Докажем теперь единственность решения задачи Коши (VII, 2; 62), (VII, 2; 63). Разность U двух решений также является решением уравнения (VII, 2; 1). Она удовлетворяет начальным условиям $U_0(x, y)=U_1(x, y)=0$ и краевому условию $U(x, y, t)\equiv 0$ на Г. Но тогда

$$E=\frac{1}{2}\iint\limits_G \left\{\frac{1}{v^2}U_1^2+\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U_0}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy=0. \qquad \text{(VII, 2; 69)}$$

Энергия, равняясь нулю в начальный момент, равна нулю все время. Следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial t}\equiv 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x}\equiv 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial y}\equiv 0, \qquad \text{(VII, 2; 70)}$$

поэтому U постоянна. Поскольку U равна нулю в начальный момент, она равна нулю и в любой другой момент времени, т. е. U равна нулю тождественно.

Ч. и т. д.

2. Решение задачи Коши для уравнения колебаний мембраны методом гармоник [1]). Пусть область G ограничена и границей ее является замкнутая кривая Г. Стационарным решением уравнения (VII, 2; 1) называется решение вида

$$u(x, y, t)=U(x, y)V(t). \qquad \text{(VII, 2; 71)}$$

Для такой функции из уравнения (VII, 2; 1) можно получить равенства

$$\frac{\Delta U}{U}=\frac{V''}{v^2V}=\lambda, \qquad \text{(VII, 2; 72)}$$

где λ обязана быть постоянной. Обратно, если λ — постоянная, то решения $U(x, y)$ и $V(t)$ уравнений

$$\Delta U-\lambda U=0, \qquad \text{(VII, 2; 73)}$$

$$V''-\lambda v^2V=0 \qquad \text{(VII, 2; 74)}$$

приводят к стационарному решению уравнения (VII, 2; 1).

[1]) Этот метод применим также и к трехмерному волновому уравнению. Мы ограничимся тем, что предложим читателю лишь некоторые упражнения на этот случай.

Мы собираемся отыскать стационарные решения уравнения (VII, 2; 1), которые удовлетворяют условию (VII, 2; 63) на контуре Г. Можно предположить, что функция $V(t)$ не равна тождественно нулю, в противном случае мембрана оставалась бы неподвижной. Тогда условие (VII, 2; 63) может выполняться при любом значении t, только если

$$U(x, y) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \qquad \text{(VII, 2; 75)}$$

Как и в случае колебаний струны, это возможно только при исключительных значениях λ. Мы предположим, что граница Г области G „регулярна", и примем без доказательства следующую теорему.

Теорема Дирихле

Задача об отыскании решений уравнения в частных производных

$$\Delta U - \lambda U = 0, \qquad \text{(VII, 2; 73)}$$

удовлетворяющих краевому условию

$$U(x, y) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \qquad \text{(VII, 2; 75)}$$

имеет только нулевые решения при любом λ, за исключением счетного множества вещественных строго отрицательных значений λ:

$$\lambda_1 = -\omega_1^2, \quad \lambda_2 = -\omega_2^2, \ \ldots, \ \lambda_n = -\omega_n^2, \ \ldots$$

При каждом из этих значений λ задача имеет конечное число $p(1)$, $p(2), \ldots, p(n), \ldots$ линейно независимых решений, которые принадлежат $L^2(G)$. Выберем линейно независимые решения $U_{n1}, U_{n2}, \ldots, U_{np(n)}$, с нормой 1 в $L^2(G)$, соответствующие данному λ_n, так чтобы функции $U_{kj(k)}$ $[k = 1, 2, \ldots, n, \ldots; \ j(k) = 1, 2, \ldots, p(k)]$ были попарно ортогональны в $L^2(G)$ [1]. *Тогда эти функции $U_{kj(k)}$ будут образовывать гильбертов базис в $L^2(G)$.*

Замечание. Легко видеть, что числа λ должны быть вещественными отрицательными.

В самом деле, справедливо равенство

$$\iint_G \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy = -\iint_G U \Delta U\, dx\, dy, \qquad \text{(VII, 2; 76)}$$

[1] Эти числа λ_n называются собственными значениями задачи (VII, 2; 73), (VII, 2; 75). Функции $U_{n1}, \ldots, U_{np(n)}$ называются собственными функциями, соответствующими данному λ_n. Если $p(n) = 1$, то λ_n называется простым собственным значением; если же $p(n) > 1$, то λ_n называется кратным собственным значением, а число $p(n)$ называется его кратностью.

правая часть которого получается из левой интегрированием по частям, с учетом условия (VII, 2; 75).

В силу равенства (VII, 2; 73) правая часть равна

$$-\lambda \int\limits_G \int U^2\,dx\,dy, \qquad \text{(VII, 2; 77)}$$

откуда и следует требуемый результат.

Остается решить уравнение

$$V'' + \omega^2 v^2 V = 0. \qquad \text{(VII, 2; 78)}$$

Его общее решение имеет вид

$$V(t) = a\cos\omega vt + b\sin\omega vt. \qquad \text{(VII, 2; 79)}$$

Таким образом, наиболее общий вид стационарного решения следующий:

$$u_n(x, y, t) = \sum_{j=1}^{p(n)} U_{nj}(x, y)(a_{nj}\cos\omega_n vt + b_{nj}\sin\omega_n vt). \qquad \text{(VII, 2; 80)}$$

Будем теперь искать решение уравнения (VII, 2; 1) в виде

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{p(n)} U_{nj}(x, y)(a_{nj}\cos\omega_n vt + b_{nj}\sin\omega_n vt). \qquad \text{(VII, 2; 81)}$$

Остается написать, что функция $u(x, y, t)$ удовлетворяет начальным условиям (VII, 2; 62):

$$\left.\begin{aligned} u_0(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{p(n)} U_{nj}a_{nj}, \\ u_1(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{p(n)} U_{nj}b_{nj}\omega_n v. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII, 2; 82)}$$

Мы должны, таким образом, разложить функции $u_0(x, y)$ и $u_1(x, y)$ в ряды по функциям U_{nj}, что возможно [при условии, что u_0 и u_1 принадлежат $L^2(G)$], поскольку функции U_{nj} образуют тотальную систему в $L^2(G)$.

Прямоугольная мембрана

3. Частные случаи: прямоугольная мембрана и круговая мембрана. Примем здесь за G прямоугольник

$$G\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant A, \\ 0 \leqslant y \leqslant B. \end{cases} \qquad \text{(VII, 2; 83)}$$

Будем искать $U(x, y)$ в виде

$$U(x, y) = L(x)M(y). \qquad \text{(VII, 2; 84)}$$

Тогда уравнение (VII, 2; 73) примет вид

$$\frac{L''}{L} + \frac{M''}{M} + \omega^2 = 0, \tag{VII, 2; 85}$$

а краевое условие (VII, 2; 75) превратится в условия

$$L(0) = L(A) = 0, \tag{VII, 2; 86}$$

$$M(0) = M(B) = 0. \tag{VII, 2; 87}$$

Равенство (VII, 2; 85) возможно, только если

$$L'' + \alpha L = 0, \tag{VII, 2; 88}$$

$$M'' + \beta M = 0, \tag{VII, 2; 89}$$

где α и β — две постоянные, связанные соотношением

$$\alpha + \beta = \omega^2. \tag{VII, 2; 90}$$

Решениями задачи (VII, 2; 88), (VII, 2; 86) служат функции

$$\sin\frac{k\pi x}{A} \quad \left(\sqrt{\alpha} = \frac{k\pi}{A}\right) \tag{VII, 2; 91}$$

с целыми положительными k ($k > 0$) (ср. стр. 310). Аналогично решениями задачи (VII, 2; 89), (VII, 2; 87) служат функции

$$\sin\frac{l\pi y}{B} \quad \left(\sqrt{\beta} = \frac{l\pi}{B}\right) \tag{VII, 2; 92}$$

с целыми положительными l.

Таким образом, мы получаем для этого случая все собственные значения задачи:

$$\lambda_{kl} = -\omega_{kl}^2 = -\pi^2\left(\frac{k^2}{A^2} + \frac{l^2}{B^2}\right), \tag{VII, 2; 93}$$

где k, l — целые положительные числа.

В этом частном случае значения λ оказываются, конечно, вещественными отрицательными. Собственные функции имеют вид

$$U_{kl} = \sin\frac{k\pi x}{A}\sin\frac{l\pi y}{B}. \tag{VII, 2; 94}$$

В качестве $V(t)$ получаем функции

$$V_{kl}(t) = a_{kl}\cos\omega_{kl}vt + b_{kl}\sin\omega_{kl}vt, \tag{VII, 2; 95}$$

где частоты ω_{kl} даются формулой (VII, 2; 93).

Стационарное движение, соответствующее целым числам k и l, имеет по времени частоту

$$N=\frac{v}{2}\sqrt{\frac{k^2}{A^2}+\frac{l^2}{B^2}}\,. \qquad \text{(VII, 2; 96)}$$

Эта формула обобщает формулу (VII, 1; 108), полученную для колеблющейся струны. Эти частоты не являются кратными основной частоты

$$N_0=\frac{v}{2}\sqrt{\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}}, \qquad \text{(VII, 2; 97)}$$

если $A\neq B$. Если же $A=B$ (квадратная мембрана), то

$$N=\sqrt{\frac{k^2+l^2}{2}}\,N_0, \quad \text{где} \quad N_0=\frac{\sqrt{2}}{2A}v. \qquad \text{(VII, 2; 98)}$$

Решение уравнения (VII, 2; 1) будем искать в виде

$$u(x,\ y,\ t)=\sum_{k,\ l=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi x}{A}\sin\frac{l\pi y}{B}(a_{kl}\cos\omega_{kl}vt+b_{kl}\sin\omega_{kl}vt). \qquad \text{(VII, 2; 99)}$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям, следует положить

$$\left.\begin{aligned} u_0(x,\ y)&=\sum_{k,\ l=1}^{\infty}a_{kl}\sin\frac{k\pi x}{A}\sin\frac{l\pi y}{B},\\ u_1(x,\ y)&=\sum_{k,\ l=1}^{\infty}vb_{kl}\pi\sqrt{\frac{k^2}{A^2}+\frac{l^2}{B^2}}\sin\frac{k\pi x}{A}\sin\frac{l\pi y}{B}.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII, 2; 100)}$$

Таким образом, функции $u_0(x,\ y)$ и $u_1(x,\ y)$ надо разложить в ряды Фурье с двумя переменными по функциям $\sin\frac{k\pi x}{A}\sin\frac{l\pi y}{B}$ (см. упражнения к гл. IV).

Но ведь всякая функция f от $(x,\ y)$, заданная в прямоугольнике G, допускает единственное разложение этого типа.

В самом деле, при $0\leqslant y\leqslant B$ можно продолжить функцию $x\to f(x,\ y)$ на интервал $(-A,\ 0)$ как нечетную функцию от x, а затем при $y\in(-B,\ 0)$ и $x\in(-A,\ A)$ положить

$$f(x,\ y)=-f(x,\ -y).$$

Тогда возникнет функция, определенная в прямоугольнике

$$-A\leqslant x\leqslant A, \quad -B\leqslant y\leqslant B.$$

Ее можно далее продолжить до периодической функции с периодом $2A$ по x и с периодом $2B$ по y.

Коэффициенты a_{kl} и b_{kl} даются формулами

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_{kl}}{4} &= \frac{1}{AB}\int_0^A dx \int_0^B u_0(x, y)\sin\frac{k\pi x}{A}\sin\frac{l\pi y}{B}\,dy \\ &\text{и} \\ \frac{b_{kl}\omega_{kl}v}{4} &= \frac{1}{AB}\int_0^A dx \int_0^B u_1(x, y)\sin\frac{k\pi x}{A}\sin\frac{l\pi y}{B}\,dy. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII, 2; 101)}$$

Это рассуждение показывает, что в нашем частном случае система U_{kl}, заданная равенством (VII, 2; 94), является тотальной.

Мы получаем, таким образом, некоторое решение нашей задачи, и мы знаем, что оно является единственным.

Круговая мембрана

Примем теперь за область G диск

$$x^2 + y^2 \leqslant R^2. \qquad \text{(VII, 2; 102)}$$

Мы ограничимся, кроме того, изучением решений уравнения (VII, 2; 1), *обладающих круговой симметрией*, т. е. мы ограничимся изучением решений вида $u(r, t)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, которые удовлетворяют начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(r, 0) &= u_0(r), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) &= u_1(r) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII, 2; 103)}$$

и краевому условию

$$u(R, t) \equiv 0. \qquad \text{(VII, 2; 104)}$$

Будем искать $u(r, t)$ в виде

$$u(r, t) = U(r)V(t), \qquad \text{(VII, 2; 105)}$$

тогда уравнение (VII, 2; 73) примет вид

$$U'' + \frac{1}{r}U' + \omega^2 U = 0 \qquad \text{(VII, 2; 106)}$$

[ср. с формулой (II, 2; 59)]. Условие (VII, 2; 104) превратится в условие

$$U(R) = 0. \qquad \text{(VII, 2; 107)}$$

Сделаем в уравнении (VII, 2; 106) замену переменного

$$\rho = \omega r. \qquad \text{(VII, 2; 108)}$$

тогда $\tilde{U}(\rho) = U(\rho/\omega)$ будет решением уравнения

$$\tilde{U}'' + \frac{1}{\rho}\tilde{U}' + \tilde{U} = 0. \qquad \text{(VII, 2; 109)}$$

Следовательно (см. гл. IX и упражнение IX-5),

$$\tilde{U}(\rho) = J_0(\rho), \qquad \text{(VII, 2; 110)}$$

поскольку нужно брать только регулярные решения. Здесь J_0 — функция Бесселя с индексом 0.

В качестве решения уравнения (VII, 2; 106) получаем, таким образом, функцию

$$U(r) = J_0(\omega r). \qquad \text{(VII, 2; 111)}$$

Величина ω должна удовлетворять уравнению

$$J_0(\omega R) = 0, \qquad \text{(VII, 2; 112)}$$

чтобы выполнялось условие (VII, 2; 107).

Однако известно, что все нули функции J_0 вещественны (гл. IX). Поэтому уравнение (VII, 2; 112) приводит нас лишь к вещественным значениям ω. С другой стороны, замена ω на $-\omega$ в формуле (VII, 2; 111) дает ту же самую функцию $U(r)$. Поэтому надо удержать только положительные значения ω. Пусть $z_1, \ldots, z_n, \ldots$ — последовательность положительных нулей функции J_0. Тогда значения ω даются равенством

$$\omega_n R = z_n \quad \text{или} \quad \omega_n = \frac{z_n}{R}. \qquad \text{(VII, 2; 113)}$$

(Это равенство показывает также, что в данном случае числа $\lambda_n = -\omega_n^2$ — вещественные отрицательные.) Функция $U_n(r)$, соответствующая ω_n, равна

$$U_n(r) = J_0\left(\frac{z_n r}{R}\right). \qquad \text{(VII, 2; 114)}$$

Для функций $V(t)$ получаем равенство

$$V_n(t) = a_n \cos\frac{z_n}{R} vt + b_n \sin\frac{z_n}{R} vt. \qquad \text{(VII, 2; 115)}$$

Стационарное движение, соответствующее целому числу n, обладает частотой

$$N = \frac{z_n}{2\pi R} v. \qquad \text{(VII, 2; 116)}$$

Функцию $u(r, t)$ будем искать в виде

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\frac{z_n r}{R}\right)\left(a_n \cos\frac{z_n}{R} vt + b_n \sin\frac{z_n}{R} vt\right). \qquad \text{(VII, 2; 117)}$$

Запишем, что она удовлетворяет начальным условиям (VII, 2; 103):

$$\left.\begin{aligned} u_0(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\frac{z_n r}{R}\right) a_n, \\ u_1(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\frac{z_n r}{R}\right) \frac{z_n}{R} b_n v. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII, 2; 118)}$$

Таким образом, надо разложить функции $u_0(r)$ и $u_1(r)$ в ряд по функциям $J_0\left(\frac{z_n r}{R}\right)$, что возможно в силу теоремы Дирихле, если $u_0(r)$ и $u_1(r)$ достаточно регулярны. Тогда коэффициенты a_n и b_n будут полностью определены, а следовательно, будет полностью определена и функция $u(r, t)$. Мы получим некоторое решение задачи, и мы знаем, что оно будет единственным.

4. Волновое уравнение в R^n. Волновым уравнением в пространстве R^n называется уравнение

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \qquad \text{(VII, 2; 119)}$$

где

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}. \qquad \text{(VII, 2; 120)}$$

Подробный анализ этого уравнения выходит за рамки нашего курса. Мы ограничимся только тем, что предложим в упражнениях некоторые вопросы, относящиеся к этому анализу.

§ 3. Уравнение теплопроводности

Мы уже встречались с уравнением теплопроводности (гл. V, § 4). Мы собираемся изучить здесь решения упрощенного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{(VII, 3; 1)}$$

методами, аналогичными методам, которые мы использовали для уравнения колебаний струны и для уравнения колебаний мембраны.

1. Анализ методом распространяющихся волн; задача Коши. Мы уже знаем, что элементарное решение для оператора

$$\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad \text{(VII, 3; 2)}$$

имеет вид

$$\frac{Y(t)}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \tag{VII, 3; 3}$$

[см. формулу (V, 4; 16) гл. V].

С другой стороны, легко проверить, что интеграл

$$I(x, t; f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} f(\xi)\, d\xi \tag{VII, 3; 4}$$

при $x \in R$ и $t > 0$ будет решением уравнения (VII, 3; 1), какова бы ни была достаточно регулярная функция $f(\xi)$.

Покажем дополнительно, что $I(x, t; f) \to f(x)$ при $t \to 0$.

Согласно формуле (V, 1; 38), имеем

$$\frac{e^{-\frac{\xi^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} = \mathscr{F}[e^{-4\pi^2 t\lambda^2}] \tag{VII, 3; 5}$$

и, значит,

$$I(x, t; f) = \mathscr{F}[e^{-4\pi^2 t\lambda^2}] \underset{(\xi)}{*} f. \tag{VII, 3; 6}$$

Но $e^{-4\pi^2 t\lambda^2} \to 1$ в $\mathscr{S}'$, когда $t \to 0$, и, следовательно, $\mathscr{F}[e^{-4\pi^2 t\lambda^2}] \to \delta$ в $\mathscr{S}'$, а значит, и в $\mathscr{D}'$ (см. упражнения к гл. V). Используя теперь непрерывность свертки, мы выводим отсюда, что

$$I(x, t; f) \to \delta * f = f(x). \tag{VII, 3; 7}$$

Задача Коши

1. Случай неограниченного теплопроводника. В этом случае задача Коши состоит в том, чтобы найти решение уравнения (VII, 3; 1) удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = u_0(x). \tag{VII, 3; 8}$$

В силу соотношения (VII, 3; 7) таким решением будет функция

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} u_0(\xi)\, d\xi. \tag{VII, 3; 9}$$

Мы примем без доказательства, что это решение является единственным

2. Случай теплопроводника с концом в начале координат. Задача Коши состоит теперь в том, чтобы найти решение уравне

ния (VII, 3; 1), удовлетворяющее начальному условию (VII, 3; 8) и некоторому краевому условию. Например,

$$u(0,\ t) \equiv 0, \qquad \text{(VII, 3; 10)}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t) \equiv 0, \qquad \text{(VII, 3; 11)}$$

или же какому-нибудь из более сложных условий, которых мы не касаемся.

В случае краевого условия (VII, 3; 10) функцию u_0 продолжают до четной функции $\overline{u}_0$; в случае же краевого условия (VII, 3; 11) ее продолжают до нечетной функции u_1. В первом случае решение задачи Коши дается формулой (VII, 3; 9) с заменой u_0 на $\overline{u}_0$; во втором случае решение также дается формулой (VII, 3; 9), но с заменой u_0 на u_1. Мы снова примем без доказательства, что найденное таким способом решение является единственным.

3. Случай теплопроводника, ограниченного с обоих концов (0 и L). Задача Коши состоит здесь в том, чтобы найти решение уравнения (VII, 3; 1), удовлетворяющее начальному условию (VII, 3; 8) и двум краевым условиям. Мы ограничимся следующими типами краевых условий: либо

$$u(0,\ t) = u(L,\ t) \equiv 0, \qquad \text{(VII, 3; 12)}$$

либо

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,\ t) \equiv 0. \qquad \text{(VII, 3; 13)}$$

Здесь снова следовало бы продолжить функцию u_0 так, чтобы краевые условия (VII, 3; 12) или (VII, 3; 13) были удовлетворены. Мы не останавливаемся на этом подробнее, потому что мы дадим явное решение этой задачи методом гармоник.

Единственность в задаче Коши

Рассмотрим случай ограниченного теплопроводника длины L. Разность U двух решений задачи Коши (VII, 3; 8), (VII, 3; 12) [соответственно (VII, 3; 8), (VII, 3; 13)] является решением уравнения (VII, 3; 1), удовлетворяющим начальному условию

$$U_0(x) \equiv 0 \qquad \text{(VII, 3; 14)}$$

и краевым условиям

$$U(0,\ t) = U(L,\ t) \equiv 0 \qquad \text{(VII, 3; 15)}$$

[соответственно краевым условиям

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0,\ t) = \frac{\partial U}{\partial x}(L,\ t) \equiv 0\Big]. \qquad \text{(VII, 3; 16)}$$

Из уравнения (VII, 3; 1) получаем равенство

$$\int_0^L \frac{\partial U}{\partial t} U\,dx = \int_0^L \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} U\,dx, \qquad \text{(VII, 3; 17)}$$

из которого в свою очередь выводим равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L U^2\,dx = \left[\frac{\partial U}{\partial x} U\right]_0^L - \int_0^L \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx. \qquad \text{(VII, 3; 18)}$$

При краевых условиях (VII, 3; 15) или (VII, 3; 16) проинтегрированный член $\left[\frac{\partial U}{\partial x} U\right]_0^L$ обращается в нуль.

Положим теперь

$$G(t) = \int_0^L U^2(x, t)\,dx. \qquad \text{(VII, 3; 19)}$$

Из равенств (VII, 3; 19) и (VII, 3; 18) вытекает, что $G(t)$ является неотрицательной убывающей функцией. Но значение $G(0)$ равно нулю согласно равенству (VII, 3; 14). Следовательно, функция $G(t)$ тождественно равна нулю и, значит, функция U также равна нулю.

Ч. и т. д.

2. Решение задачи Коши методом гармоник. Стационарным решением уравнения (VII, 3; 1) называется решение вида

$$u(x, t) = U(x)V(t). \qquad \text{(VII, 3; 20)}$$

Для подобной функции u уравнение (VII, 3; 1) превращается в уравнения

$$\frac{U''}{U} = \frac{V'}{V} = -\lambda, \qquad \text{(VII, 3; 21)}$$

где λ — некоторая постоянная. Обратно, если λ — постоянная, то решения дифференциальных уравнений

$$U'' + \lambda U = 0, \qquad \text{(VII, 3; 22)}$$

$$V' + \lambda V = 0 \qquad \text{(VII, 3; 23)}$$

определяют некоторое стационарное решение уравнения (VII, 3; 1).

Найдем сначала стационарные решения уравнения (VII, 3; 1), удовлетворяющие краевым условиям (VII, 3; 12).

Можно предположить, что функция $V(t)$ не равна тождественно нулю, в противном случае функция $u(x, t)$ была бы тождественным нулем. При этом краевые условия (VII, 3; 12) могут удовлетворяться, только если выполнены условия

$$U(0)=U(L)=0. \qquad \text{(VII, 3; 24)}$$

Решения уравнения (VII, 3; 22), удовлетворяющие условиям (VII, 3; 24), обязательно имеют вид

$$\sin\sqrt{\lambda}\,x, \quad \text{где} \quad \sqrt{\lambda}=\frac{k\pi}{L}, \quad k \text{ — целое} > 0. \qquad \text{(VII, 3; 25)}$$

Тогда решениями уравнения (VII, 3; 23) служат функции

$$a_k e^{-\frac{k^2\pi^2 t}{L^2}}, \qquad \text{(VII, 3; 26)}$$

а функции

$$u_k(x, t)=a_k e^{-\frac{k^2\pi^2 t}{L^2}} \sin\frac{k\pi x}{L} \qquad \text{(VII, 3; 27)}$$

дают общий вид стационарного решения.

Будем, следовательно, искать решение задачи в виде ряда

$$u(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2\pi^2 t}{L^2}} \sin\frac{k\pi x}{L}. \qquad \text{(VII, 3; 28)}$$

Запишем, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет условию (VII, 3; 8):

$$u_0(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi x}{L}. \qquad \text{(VII, 3; 29)}$$

Остается разложить функцию $u_0(x)$ в ряд Фурье по функциям $\sin\frac{k\pi x}{L}$; это возможно (см. стр. 312—313). Коэффициенты a_k даются формулой

$$a_k=\frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx. \qquad \text{(VII, 3; 30)}$$

Здесь мы снова получаем явное решение задачи Коши (VII, 3; 8), (VII, 3; 12), и мы знаем, что оно является единственным.

Чтобы решить этим методом задачу Коши (VII, 3; 8), (VII, 3; 13), нужно решать те же самые уравнения (VII, 3; 22) и (VII, 3; 23), но с заменой краевых условий (VII, 3; 24) условиями

$$\frac{dU}{dx}(0)=\frac{dU}{dx}(L)=0. \qquad \text{(VII, 3; 31)}$$

Решениями уравнения (VII, 3; 22), удовлетворяющими условиям (VII, 3; 31), служат функции

$$\cos\sqrt{\lambda}\,x, \quad \text{где} \quad \sqrt{\lambda}=\frac{k\pi}{L}, \quad k \text{ — целое } \geqslant 0 \qquad \text{(VII, 3; 32)}$$

(см. стр. 315).

Тогда решениями уравнения (VII, 3; 23) служат функции

$$\left.\begin{aligned} V_0(t) &= a_0, \\ V_k(t) &= a_k e^{-\frac{k^2\pi^2 t}{L^2}} \quad \text{при} \quad k>0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII, 3; 33)}$$

Поэтому решение задачи мы ищем в виде ряда

$$u(x,\ t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2\pi^2 t}{L^2}} \cos\frac{k\pi x}{L}. \qquad \text{(VII, 3; 34)}$$

Запишем, что решение удовлетворяет начальному условию (VII, 3; 8):

$$u_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{L}. \qquad \text{(VII, 3; 35)}$$

Разложение функции $u_0(x)$ в ряд Фурье по функциям $\cos\frac{k\pi x}{L}$ полностью определяет коэффициенты a_k. Они даются формулами

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L}\int_0^L u_0(x)\,dx, \\ a_k &= \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII, 3; 36)}$$

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VII

Упражнение VII-1. (Щипок струны.) Рассмотрим колеблющуюся струну длины L, закрепленную на обоих концах $x=0$ и $x=L$.

В начальный момент струна оттягивается в точках A и C и отпускается без начальной скорости. Начальное положение струны определяется графиком функции $u_0(x)=\frac{4h}{L}v_0(x)$, $h>0$, где

$$v_0(x)=\begin{cases} x & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant L/4, \\ -(x-L/2) & \text{при} \quad L/4 \leqslant x \leqslant 3L/4, \\ x-L & \text{при} \quad 3L/4 \leqslant x \leqslant L. \end{cases}$$

Определить положение струны в момент t, используя метод стационарных волн. Каковы частоты полученных гармоник? С какой скоростью убывают их амплитуды?

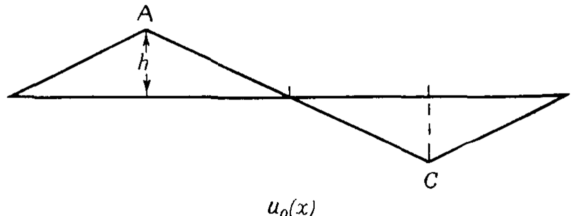


Рис. VII, 14.

Упражнение VII-2. Упражнение, совпадающее с предыдущим, но при условии, что струна оттянута только в средней точке A. Начальное положение струны определяется графиком функции $u_0(x) = \frac{2h}{L} v_0(x)$, где

$$v_0(x) = \begin{cases} x & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant L/2, \\ L - x & \text{при} \quad L/2 \leqslant x \leqslant L. \end{cases}$$

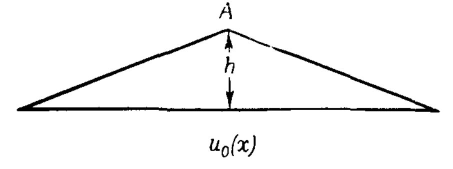


Рис. VII. 15.

Упражнение VII-3. Такое же, как и предыдущее, но с

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{h}{l} x & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ \frac{h}{l - L}(x - L) & \text{при} \quad l \leqslant x \leqslant L. \end{cases}$$

Числа l и h даны ($h > 0$, $0 < l < L$).

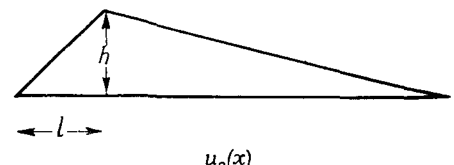


Рис. VII, 16.

Упражнение VII-4. Методом гармоник найти положение колеблющейся струны в момент времени t. Длина струны равна L, оба конца закреплены, начальная скорость равна нулю, а начальное положение определяется графиком функции $u_0(x) = x(L - x)$. Каковы частоты гармоник? С какой скоростью убывают их амплитуды?

Упражнение VII-5. (Удар по струне.) Методом гармоник найти положение колеблющейся струны в момент времени t. Длина струны равна L; оба конца закреплены, начальное положение совпадает с отрезком $0 \leqslant x \leqslant L$, а начальная скорость дается распределением Дирака в точке B с абсциссой b, $0 < b < L$ $\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \delta_{(b)}\right)$.

Упражнение VII-6. Найти решение уравнения колебаний струны, удовлетворяющее следующим условиям Коши:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{когда} \quad 2p < x < 2p + 1, \\ 0, & \text{когда} \quad 2p + 1 < x < 2p + 2, \quad p \text{ — целое,} \end{cases}$$

$$u_1(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_{(n)}.$$

Упражнение VII-7. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sin(\alpha x - \omega t),$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

Положить $\omega/\alpha = c$.

Упражнение VII-8. Изучить распространение одномерной волны, которая движется со скоростью v_1 при $x > 0$ и со скоростью v_2 при $x < 0$ и удовлетворяет начальным условиям

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x),$$

где функция $\psi(x)$ равна нулю при $x < 0$.

Упражнение VII-9. Положим

$$\Lambda_n = \frac{\partial^n}{\partial y^n} + a_1 \frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \ldots + a_p \frac{\partial^{n-p}}{\partial y^{n-p}} \cdot \frac{\partial^p}{\partial x^p} + \ldots + a_n \frac{\partial^n}{\partial x^n}, \tag{1}$$

где a_p — данные комплексные числа.

Предлагается искать решения уравнения

$$\Lambda_n(u(x, y)) = 0 \tag{2}$$

в виде $u(x, y) = f(x + \lambda y)$; тогда λ будет корнем характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_p\lambda^{n-p} + \ldots + a_n = 0. \qquad (3)$$

В случае, когда характеристическое уравнение (3) имеет n вещественных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, оператор (1) можно представить в виде

$$\Lambda_n = \left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x}\right) \ldots \left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_n \frac{\partial}{\partial x}\right).$$

1) Показать, что если все λ_i различны, то любое решение уравнения (2) имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{n} F_k(x + \lambda_k y), \qquad (4)$$

где F_k — произвольные функции. Рассуждение можно вести индукцией по n:

2) Как следует изменить формулу (4) в случае, когда уравнение (3) имеет кратные корни?

Упражнение VII-10. Рассмотрим n-мерное волновое уравнение

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \quad \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

в брусе

$$0 \leqslant x_i \leqslant A_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Найти все стационарные решения вида

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = \left[\prod_{i=1}^{n} U_i(x_i)\right] V(t),$$

для которых $U_i(0) = U_i(A_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

При $n = 2$ отыскать то из решений волнового уравнения, которое удовлетворяет начальным условиям

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_1, x_2, 0) = 0, \quad u(x_1, x_2, 0) = x_1 x_2 (A_1 - x_1)(A_2 - x_2).$$

Упражнение VII-11. Для уравнения

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

в области $0 \leqslant x \leqslant 1$ найти все стационарные решения вида

$$u(x, t) = U(x) V(t),$$

которые удовлетворяют краевым условиям

$$u(0, t)=u(1, t)=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1, t)=0.$$

Определить то из решений уравнения, которое удовлетворяет начальным условиям

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)=0, \quad u(x, 0)=x^4-2x^3+x.$$

Упражнение VII-12. Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{1}$$

для линейного теплопроводника длины L, который расположен на отрезке $0 \leqslant x \leqslant L$.

Найти все стационарные решения уравнения (1) при краевых условиях

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t)=\frac{\partial u}{\partial x}(L, t)=0.$$

Упражнение VII-13. Такое же, как и предыдущее, но с краевыми условиями

$$u(0, t)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t)=0.$$

Упражнение VII-14. Такое же, как и предыдущее, но с краевыми условиями

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t)=0, \quad u(L, t)=0.$$

Упражнение VII-15. (Уравнение теплопроводности на плоскости.) Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$c\frac{\partial u}{\partial t}=\gamma\, \Delta u$$

для плоской пластинки (P). Здесь $u(x, y, t)$ — температура в точке (x, y) пластинки в момент времени t;

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

c — теплоемкость на единицу поверхности; γ — коэффициент теплопроводности.

1°. Предположим, что пластинка (P) занимает область, определяемую неравенством $x^2+y^2 \leqslant R^2$.

Найти все стационарные решения вида

$$u(x, y, t)=U(r)V(t), \quad r=\sqrt{x^2+y^2},$$

для которых функция u тождественно равна нулю на краю пластинки $r=R$.

2°. Предположим, что пластинка (P) занимает область, определяемую неравенствами $R_1^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R_2^2$.

Найти все стационарные решения вида $U(r)V(t)$, для которых функция u тождественно равна нулю на краях пластинки $r = R_1$ и $r = R_2$.

3°. Предположим, что пластинка (P) занимает область, определяемую неравенствами $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$. Найти все стационарные решения вида $U(x)V(y)W(t)$, для которых функция $u(x, y, t)$ тождественно равна нулю на краю пластинки.

Упражнение VII-16. (Уравнение теплопроводности в пространстве.) Найти все стационарные решения уравнения

$$c\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma\,\Delta u, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

вида $u(x, y, z, t) = U\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)V(z)W(t)$, для которых функция u обращается в нуль на границе области, заключенной между двумя плоскостями $z = 0$ и $z = b$ и двумя цилиндрами $x^2 + y^2 = R_1^2$ и $x^2 + y^2 = R_2^2$.

Упражнение VII-17. (Задача Коши для уравнения колебаний мембраны.) Задача состоит в том, чтобы непосредственно найти решение уравнения колебаний мембраны

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(x, y, 0) &= u_0(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) &= u_1(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

I. Пусть $f(\xi, \eta)$ — достаточно регулярная функция. Положим

$$I(x, y, t; f) = \frac{1}{2\pi v}\iint\limits_{\gamma(x, y;\, vt)} \frac{1}{\sqrt{v^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}\, f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{3}$$

где $\gamma(x, y; vt)$ — диск с центром (x, y) и радиусом vt.

a) Показать, что $\Delta I(x, y, t; f) = I(x, y, t; \Delta f)$.

b) Заменой переменных

$$x - \xi = r\cos\theta,$$
$$y - \eta = r\sin\theta$$

показать, что

$$I(x, y, t; f) = \frac{1}{v}\int_0^{vt} \frac{\bar{f}(r)}{\sqrt{v^2t^2 - r^2}}\, r\, dr, \tag{4}$$

где $\bar{f}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi, \eta)\, d\theta$ — среднее функции f по окружности с центром (x, y) и радиусом r.

Показать, что

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} I(x, y, t; f) = v\int_0^{vt} \left(\frac{\bar{f}'(r)}{r} + \bar{f}''(r)\right) \frac{r\, dr}{\sqrt{v^2t^2 - r^2}}.$$

(В процессе этих выкладок можно сначала интегрировать по частям интеграл, который стоит в правой части равенства (4), а затем — интеграл $\int_0^{vt} \frac{\bar{f}'(r)\, dr}{\sqrt{v^2t^2 - r^2}}$.)

c) Вывести из пунктов a) и b), что интеграл $I(x, y, t; f)$ является решением уравнения (1).

II. 1°. Показать, что при $t \to 0$ выполняются соотношения

a) $I(x, y, t; f) \to 0$;

b) $\frac{\partial}{\partial t} I(x, y, t; f) \to \bar{f}(0) = f(x, y)$;

c) $\frac{\partial^2}{\partial t^2} I(x, y, t; f) \to 0$.

2°. Вывести отсюда, что решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), дается формулой

$$u(x, y, t) = I(x, y, t; u_1) + \frac{\partial}{\partial t} I(x, y, t; u_0).$$

Упражнение VII-18. I. Рассмотрим уравнение Шредингера в трехмерном пространстве:

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})\right\}\psi(\vec{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t).$$

Стационарным состоянием называется состояние, описываемое волновой функцией ψ вида

$$\psi(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{r})\, e^{-i\frac{Et}{\hbar}}.$$

Показать, что отыскание стационарных состояний сводится к задаче отыскания собственных значений и собственных функций некоторого оператора. Выписать этот оператор; написать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $\Phi(\vec{r})$.

II. Ограничимся одномерной задачей с переменным x. Рассмотрим случай гармонического осциллятора, когда потенциал имеет вид

$$V(x)=\frac{1}{2}Kx^2,$$

где K — некоторая постоянная.

1°. Написать уравнение, которому удовлетворяет функция $\Phi(x)$.

2°. Положив $K=\omega^2 m$, сделать простую замену переменного, позволяющую сохранить в качестве единственного параметра величину $2E/\hbar\omega$. Новое переменное обозначить буквой z.

3°. Подобрать такую замену искомой функции типа

$$\Phi(z)=e^{\alpha z^2}f(z),$$

которая позволяет сделать коэффициенты при f'' и f не зависящими от z и лишь коэффициент при f' — зависящим от z.

4°. Искать решение в виде ряда

$$f(z)=\sum a_n z^n.$$

Написать рекуррентное соотношение, связывающее коэффициенты a_n.

5°. Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы этот ряд был полиномом. Получить отсюда собственные значения для стационарных состояний.

6°. Пусть N — степень полинома, соответствующего собственному значению E_N. Выразить коэффициенты этого полинома через коэффициент a_N и положить этот коэффициент равным 2^N. Полученный полином $H_N(z)$ называется полиномом Эрмита.

7°. Выписать нормированные собственные функции задачи. Показать, что они попарно ортогональны. При этом можно воспользоваться соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_\lambda(z)H_\mu(z)e^{-z^2}\,dz=2^\lambda\lambda!\,\pi^{1/2}\delta_{\lambda\mu},$$

где λ и μ — целые неотрицательные числа, а $\delta_{\lambda\mu}$ — символ Кронекера.

III. 1°. Рассмотрим оператор

$$P_x=-i\frac{d}{dx}$$

на одномерном пространстве. Показать, что этот оператор — эрмитов, т. е. показать, что если $f(x)$ и $g(x)$ — произвольные функции от x, стремящиеся к нулю при $x \to \pm\infty$, то

$$\langle g|P_x|f\rangle = \overline{\langle f|P_x|g\rangle},$$

где введено обозначение

$$\langle g|P_x|f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x)(P_x f(x))\,dx,$$

g^* — комплексно сопряженная к g функция, черта — знак комплексного сопряжения.

Вывести отсюда, что собственные значения оператора P_x вещественны.

2°. Найти собственные значения и собственные функции оператора P_x. Обозначить буквой k собственное значение, соответствующее собственной функции $\varphi_k(x)$.

3°. Вычислить величину

$$\Phi(k', k) = \langle \varphi_{k'}(x)|I|\varphi_k(x)\rangle,$$

где I — единичный оператор. Показать, что

$$\langle \varphi_{k'}(x)\,|\,P_x\,|\,\varphi_k(x)\rangle = k\Phi(k', k).$$

Доказать двумя способами ортогональность функций $\varphi_k(x)$ и вычислить значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k', k)\,dk'.$$

4°. В последних двух пунктах мы интересуемся оператором умножения на x. Вычислить величину

$$\frac{\langle \varphi_{k'}(x)\,|\,x\,|\,\varphi_k(x)\rangle}{\langle \varphi_k(x)\,|\,I\,|\,\varphi_k(x)\rangle}.$$

5°. Найти собственную функцию $\psi_{x_0}(x)$ оператора x, соответствующую собственному значению x_0. Вычислить величины

$$\left\langle \psi_{x_0'}(x)|\,x\,|\,\psi_{x_0}(x)\right\rangle = \Psi\left(x_0', x_0\right)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi\left(x_0', x_0\right) dx_0.$$

ГЛАВА VIII

ЭЙЛЕРОВЫ ФУНКЦИИ

1. Функция $\Gamma(z)$. Положим

Определение Г-функции с помощью интеграла

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt, \quad z=x+iy. \qquad \text{(VIII, 1; 1)}$$

Этот интеграл суммируем при $x>0$. [При $t\to\infty$ он всегда суммируем из-за наличия множителя e^{-t}. При $t\to 0$ $|e^{-t}t^{z-1}|\sim t^{x-1}$, откуда и вытекает суммируемость при $x-1>-1$, т. е. при $x>0$.] Суммируемость этого интеграла равномерна при $0<\alpha\leqslant x\leqslant A<\infty$, ибо в этом случае справедливы оценки

$$|e^{-t}t^{z-1}|\leqslant\begin{cases} t^{\alpha-1} & \text{при } 0\leqslant t\leqslant 1,\\ t^{A-1}e^{-t} & \text{при } 1\leqslant t<\infty,\end{cases}$$

а интегралы $\int_0^1 t^{\alpha-1}\,dt$ и $\int_1^\infty t^{A-1}e^{-t}\,dt$ конечны. Отсюда вытекает, что $\Gamma(z)$ является непрерывной функцией z при $x>0$, поскольку подинтегральная функция $e^{-t}t^{z-1}$ раздельно непрерывна по z (и даже непрерывна по t и z) при $t>0$, $x>0$ (см. теорему Лебега, гл. I, предложение 45).

Выполним *формальное* дифференцирование:

$$\Gamma'(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\lg t\,dt. \qquad \text{(VIII, 1; 2)}$$

Эта формула будет справедливой при $x>0$, *если интеграл* (VIII, 1; 2) *также равномерно суммируем* в области $0<\alpha\leqslant x\leqslant A<\infty$. Как и выше, это утверждение справедливо, поскольку интегралы

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}|\lg t|\,dt \quad \text{и} \quad \int_1^\infty t^{A-1}\lg t\, e^{-t}\,dt$$

конечны.

Аналогично вычисляются дальнейшие производные; в частности,

$$\Gamma''(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}(\lg t)^2\,dt. \tag{VIII, 1; 3}$$

Таким образом, $\Gamma(z)$ является бесконечно дифференцируемой (точнее, голоморфной) функцией комплексного переменного z при $x>0$.

Функциональное уравнение

Имеем

$$\Gamma(z+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^z\,dt=\left[-t^z e^{-t}\right]_0^\infty+z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt.$$

Отсюда

$$\boxed{\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)}\quad \text{при}\quad x>0. \tag{VIII, 1; 4}$$

Применение. Имеем

$$\Gamma(z+n)=(z+n-1)(z+n-2)\ldots z\Gamma(z)\quad \text{при}\quad x>0,$$

и, значит,

$$\Gamma(n)=(n-1)!\,\Gamma(1)=(n-1)! \tag{VIII, 1; 5}$$

$\left[\text{ибо } \Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}\,dt=1\right]$.

Функция $\Gamma(z+1)$, которую можно назвать факториалом $z!$, определена при $x>-1$ и принимает значение $n!$ при z, равном целому числу $n\geqslant 1$. Заметим, что, таким образом, $0!=\Gamma(1)=1$.

Продолжение $\Gamma(z)$ с помощью функционального уравнения

При любом $z\neq 0, -1, -2, \ldots$ величина

$$\frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)(z+n-2)\ldots(z+1)z}$$

является определенной при достаточно больших целых положительных n. Ее значение при этом не зависит от n, ибо если заменить n на $n+p$, то эта величина заменится величиной

$$\frac{\Gamma(z+n+p)}{(z+n+p-1)\ldots(z+1)z}=$$

$$=\frac{\Gamma(z+n)(z+n+p-1)\ldots(z+n)}{(z+n+p-1)\ldots(z+n)(z+n-1)\ldots z}=\frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)\ldots(z+1)z}.$$

Поэтому можно *определить* функцию $\Gamma(z)$ при произвольном z, отличном от 0, —1, —2, ..., посредством формулы

$$\boxed{\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)(z+n-2)\dots z}}, \qquad (\text{VIII}, 1; 6)$$

где n — произвольное целое число, такое, что $x+n>0$.

При $x>0$ мы приходим, естественно, к прежнему определению $\Gamma(z)$, как это легко видеть, положив $n=0$. Функция $\Gamma(z)$ является *голоморфной функцией комплексного переменного* z при $z\neq 0, -1, -2, \dots$.

Полюсы $\Gamma(z)$

Изучим функцию $\Gamma(z)$ в окрестности точки $z=-n$, где n — целое число $\geqslant 0$. Положим $z=-n+u$. Тогда

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(u+1)}{u(u-1)(u-2)\dots(u-n)}\sim\frac{(-1)^n}{n!\,u} \quad \text{при} \quad u\to 0. \qquad (\text{VIII}, 1; 7)$$

Следовательно, Г-функция имеет в точках $z=0, -1, -2, \dots$ *простые полюсы*; вычет в полюсе $z=-n$ равен $\frac{(-1)^n}{n!}$.

Отметим отдельно, что

$$\Gamma(z)\sim\frac{1}{z} \quad \text{при} \quad z\to 0. \qquad (\text{VIII}, 1; 8)$$

Ниже мы увидим, что $\Gamma'(1)=-\gamma$, где γ — постоянная Эйлера.

Таким образом,

$$\Gamma(z+1)=1-\gamma z+\dots \quad \text{при} \quad z\to 0$$

и, значит,

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+1)}{z}=\frac{1}{z}-\gamma+\dots \qquad (\text{VIII}, 1; 9)$$

при $z\to 0$.

Интеграл Гаусса

Формула

$$\Gamma(z)=2\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2z-1}\,dt, \qquad (\text{VIII}, 1; 10)$$

где $z=x+iy$, $x>0$, получается из формулы (VIII, 1; 1) заменой t на t^2. В частности,

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \qquad (\text{VIII}, 1; 11)$$

ибо $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, как мы увидим ниже [формула (VIII, 1; 15)].

2. Функция $\mathrm{B}(p, q)$. *Вычисление* $\Gamma(p)\Gamma(q)$ *при* $\operatorname{Re} p > 0$, $\operatorname{Re} q > 0$. Имеем

$$\Gamma(p) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}u^{2p-1}\,du,$$

$$\Gamma(q) = 2\int_0^\infty e^{-v^2}v^{2q-1}\,dv,$$

отсюда

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\iint\limits_{\substack{u\geqslant 0,\\ v\geqslant 0}} e^{-(u^2+v^2)}u^{2p-1}v^{2q-1}\,du\,dv.$$

Переходя к полярным координатам $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$, получим

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\iint\limits_{r\geqslant 0,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,dr\,d\theta =$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}\,dr\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,d\theta =$$

$$= \Gamma(p+q)\,2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,d\theta,$$

откуда, окончательно,

$$\boxed{\mathrm{B}(p, q) \equiv 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,d\theta = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.} \quad \text{(VIII, 1; 12)}$$

Интеграл Валлиса является частным случаем этого интеграла:

$$W(r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^r\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^r\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{r+1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad \text{(VIII, 1; 13)}$$

Полагая $p = q = \frac{1}{2}$, получим

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi \qquad \text{(VIII, 1; 14)}$$

и, поскольку $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{t}} > 0$, будем иметь

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.} \qquad \text{(VIII, 1; 15)}$$

Отсюда получаем

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)\ldots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) =$$
$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ \ldots\ \cdot(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}, \qquad \text{(VIII, 1; 16)}$$

где n — целое положительное число ($n > 0$).

Преобразуем формулу (VIII, 1; 12), положив $\cos^2\theta = t$:

$$\boxed{\begin{gathered}\mathrm{B}(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt,\\ \operatorname{Re} p > 0, \quad \operatorname{Re} q > 0.\end{gathered}} \qquad \text{(VIII, 1; 17)}$$

Отсюда вновь получаем соотношение

$$\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \pi. \qquad \text{(VIII, 1; 18)}$$

Как следствия из предыдущих формул получаем соотношения

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{p-1}(\beta - x)^{q-1}\,dx = (\beta-\alpha)^{p+q-1}\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

и

$$\int_0^\infty \frac{r^\alpha}{(1+r^2)^\beta}\,dr = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\beta - \frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma(\beta)}$$

(последнее — заменой $\frac{r^2}{1+r^2} = t$).

3. Формула дополнения. Имеем

$$B(z, 1-z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}\,dt = \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{1+u}\,du \quad \text{(VIII, 1; 19)}$$

$\left(\text{где сделана замена } \frac{u}{1+u} = t,\ u = \frac{t}{1-t}\right)$.

Этот интеграл (при $0 < x = \operatorname{Re} z < 1$) вычисляют методом вычетов, который рассматривается в теории функций комплексного переменного.

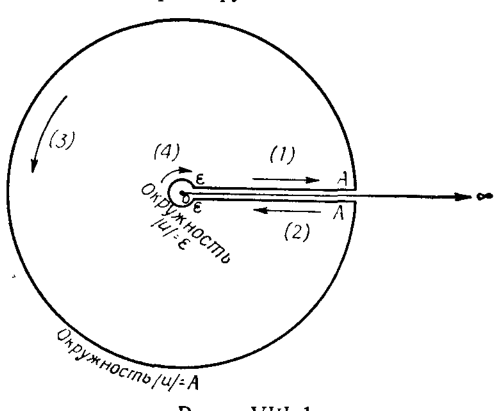


Рис. VIII, 1.

При фиксированном z, $0 < x = \operatorname{Re} z < 1$, функция $\frac{u^{z-1}}{1+u}$ является многозначной; точка $u=0$ — ее единственная точка ветвления. Рассмотрим указанный на рис. VIII, 1 контур C, участки (1) и (2) которого считаются бесконечно близкими к вещественной оси. В области, ограниченной этим контуром, наша функция распадается на отдельные однозначные ветви; мы выберем ту из них, для которой $u^{z-1} = e^{(z-1)\lg u}$ на участке (1) с вещественным значением $\lg u$. Тогда

$$\text{a)}\ \lim_{\varepsilon\to 0,\ A\to\infty} \int_{(1)} \frac{u^{z-1}}{1+u}\,du = \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{1+u}\,du;$$

$$\text{b)}\ \lim_{\varepsilon\to 0,\ A\to\infty} \int_{(2)} = e^{2i\pi z}\int_\infty^0 = -e^{2i\pi z}\int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{1+u}\,du;$$

$$\text{c)}\ \lim_{A\to\infty} \int_{(3)} = 0, \quad \text{ибо} \quad \left|\frac{u^{z-1}}{1+u}\right| \leqslant \frac{e^{(x-1)\lg A + 2\pi|y|}}{|1+u|} \leqslant C\,\frac{A^{x-1}}{A}$$

при достаточно больших A, так что интеграл $\int\limits_{(3)}$, взятый по окружности длины $2\pi A$, стремится к нулю как A^{x-1}, $x-1<0$.

d) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{(4)}=0$, ибо $\left|\frac{u^{z-1}}{1+u}\right|\leqslant\frac{e^{(x-1)\lg\varepsilon+2\pi|y|}}{|1+u|}\leqslant C\varepsilon^{x-1}$

при достаточно малых ε, так что интеграл $\int\limits_{(4)}$, взятый по окружности длины $2\pi\varepsilon$, стремится к нулю как ε^x, $x>0$.

Окончательно

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ A\to\infty}}\int\limits_C\frac{u^{z-1}}{1+u}du=(1-e^{2i\pi z})\int\limits_0^\infty\frac{u^{z-1}}{1+u}du.$$

Интеграл по контуру C вычисляется теперь по теореме о вычетах. Единственный полюс подинтегральной функции лежит в точке $u=-1$, соответствующий вычет равен значению $e^{(z-1)\lg u}$ при $u=-1$; здесь $\lg u=i\pi$ и, значит, вычет равен $e^{i\pi(z-1)}$. Окончательно

$$\int\limits_C\frac{u^{z-1}}{1+u}du=2i\pi e^{i\pi(z-1)}=-2i\pi e^{i\pi z}$$

и

$$\int\limits_0^\infty\frac{u^{z-1}}{1+u}du=\frac{-2i\pi e^{i\pi z}}{1-e^{2i\pi z}}=\pi\frac{2i}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}=\frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

Отсюда получается „формула дополнения":

$$\boxed{\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}.}\qquad\text{(VIII, 1; 20)}$$

Эта формула снова дает равенство $\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=\pi$ и, значит, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

Формула (VIII, 1; 20) доказана пока только при $0<x<1$. Однако при замене z на $z+1$ правая часть этой формулы умножается на -1; левая часть также умножается на -1:

$$\Gamma(z+1)\Gamma(-z)=z\Gamma(z)\Gamma(-z)=-\Gamma(z)\Gamma(1-z),$$

поэтому из их равенства при $0<x<1$ вытекает их равенство при любом z, у которого вещественная часть $x=\operatorname{Re} z$ не является целым числом.

Отсюда вытекает, что равенство (VIII, 1; 20) справедливо при любых нецелых z, поскольку его левая и правая части непрерывны; при целом z обе части становятся бесконечными (имеют полюсы).

4. Обобщение функции В. Имеем

$$\Gamma(p_i) = 2\int_0^\infty e^{-u_i^2} u_i^{2p_i-1}\,du_i$$

и, далее,

$$\Gamma(p_1)\ldots\Gamma(p_n) = 2^n \underset{u_1\geqslant 0,\ \ldots,\ u_n\geqslant 0}{\int\int\ldots\int} e^{-\left(u_1^2+\ldots+u_n^2\right)} u_1^{2p_1-1}\ldots u_n^{2p_n-1}\,du_1\ldots du_n. \tag{VIII, 1; 21}$$

Вычислим этот кратный интеграл интегрированием по поверхности сферы радиуса r с последующим интегрированием по r. Интегрирование по сфере радиуса r дает величину

$$2^n e^{-r^2} r^{2(p_1+\ldots+p_n)-n} r^{n-1} \underset{\substack{r=1\\ \xi_i\geqslant 0}}{\int\ldots\int} \xi_1^{2p_1-1}\ldots\xi_n^{2p_n-1}\,dS$$

(здесь была сделана замена $x_i = r\xi_i$). Последующее интегрирование по r даст величину

$$2\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(p_1+\ldots+p_n)-1}\,dr\; 2^{n-1} \underset{\substack{r=1\\ \xi_i\geqslant 0}}{\int\ldots\int} \xi_1^{2p_1-1}\ldots\xi_n^{2p_n-1}\,dS,$$

откуда

$$\boxed{\mathrm{B}(p_1, p_2, \ldots, p_n) \equiv 2^{n-1} \underset{\substack{r=1\\ \xi_i\geqslant 0}}{\int\int\ldots\int} \xi_1^{2p_1-1}\xi_2^{2p_2-1}\ldots\xi_n^{2p_n-1}\,dS = \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n)}.} \tag{VIII, 1; 22}$$

При $n=2$ мы возвращаемся к формуле (VIII, 1; 12), положив $\xi_1 = \cos\theta$, $\xi_2 = \sin\theta$, $dS = d\theta$ на единичной окружности $r=1$, $\xi_1 \geqslant 0$, $\xi_2 \geqslant 0$.

Формула (VIII, 1; 22) позволяет вычислять „моменты" сферического квадранта, т. е. интегралы типа поверхностного интеграла, стоящего в средней части этой формулы. В частности, если все $p_i = \frac{1}{2}$, то

$$B\left(\frac{1}{2}, \ \ldots, \ \frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = 2^{n-1}\frac{S_n}{2^n} = \frac{S_n}{2}, \qquad \text{(VIII, 1; 23)}$$

где S_n — площадь единичной сферы, а $\frac{S_n}{2^n}$ — площадь сферического квадранта. Отсюда

$$S_n = \frac{2\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \qquad \text{(VIII, 1; 24)}$$

Таким образом,

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = 2, \quad S_2 = 2\pi \left[\text{что вновь дает равенство } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right], \\ S_3 = 4\pi, \quad S_4 = 2\pi^2, \quad S_5 = \frac{3}{8}\pi^2, \quad S_6 = \pi^3. \end{array}\right\} \qquad \text{(VIII, 1; 25)}$$

Преобразуем формулу (VIII, 1; 22), положив $p_i = \frac{\alpha_i + 1}{2}$. Тогда

$$\int\int\limits_{\substack{r=1\\ \xi_i \geqslant 0}} \ldots \int \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\ldots\xi_n^{\alpha_n}\,dS = \frac{1}{2^{n-1}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha_2+1}{2}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{\alpha_n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ \ldots\ +\alpha_n+n)}{2}\right)}.$$

(VIII, 1; 26)

Найдем, в частности, центр масс G сферического октанта $r = 1$, $\xi_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, 3)$ в пространстве R^3. Имеем

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\int\int \xi_1\,dS}{\int\int dS}; \quad \int\int \xi_1\,dS = \dfrac{(\sqrt{\pi})^2}{4} = \dfrac{\pi}{4}; \\ \int\int dS = \dfrac{(\sqrt{\pi})^3}{4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \dfrac{\pi}{2}; \quad x_1 = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right\} \qquad \text{(VIII, 1; 27)}$$

То же самое значение мы получаем и для других координат: $x_i = \frac{1}{2}$, $i = 1, 2, 3$, откуда $OG = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. График функции $y = \Gamma(x)$ при вещественном x. При $x > 0$ вторая производная $\Gamma''(x)$ всегда положительна [см. формулу (VIII, 1; 3)].

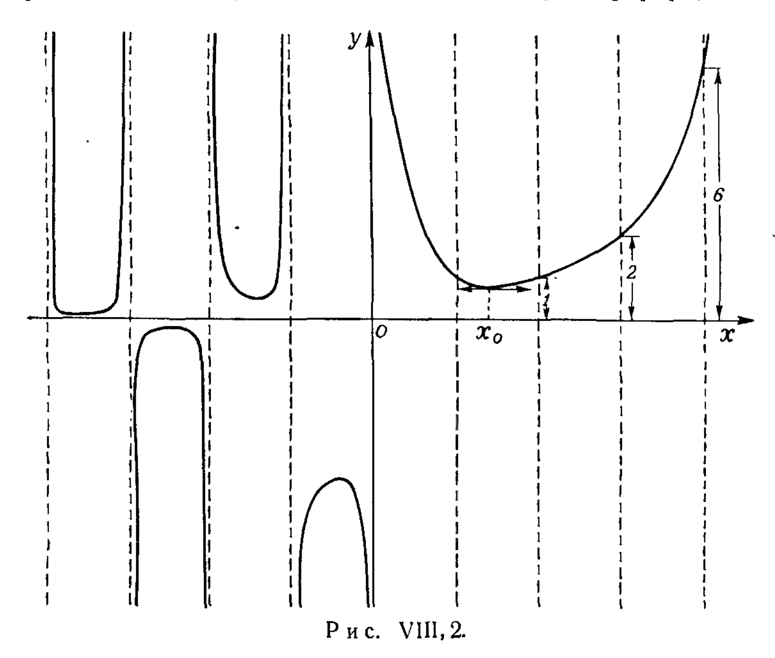


Рис. VIII, 2.

Поэтому Γ — *выпуклая* функция, значит, она либо монотонна, либо сначала убывает, а затем, пройдя через некоторый минимум, возрастает. Но ведь $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$; поэтому Γ-функция имеет некоторый минимум в точке $x = x_0$, $1 < x_0 < 2$, убывает при $x < x_0$ и возрастает при $x > x_0$.

Изучим теперь Γ-функцию при $x < 0$.

Беря логарифмическую производную от обеих частей равенства (VIII, 1; 4), а затем обычную производную, будем иметь

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x},$$

$$\frac{\Gamma''(x+1)\,\Gamma(x+1) - \Gamma'^2(x+1)}{\Gamma^2(x+1)} = \frac{\Gamma''(x)\,\Gamma(x) - \Gamma'^2(x)}{\Gamma^2(x)} - \frac{1}{x^2}.$$

Отсюда вытекает, что величина $\frac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2}$ уменьшается при увеличении переменного x на 1, и, следовательно, она увеличивается при уменьшении x на 1. При $x > 0$ имеем

$$\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2 = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} (\lg t)^2 \, dt \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \, dt - \left(\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \lg t \, dt \right)^2.$$

Правая часть здесь положительна в силу неравенства Шварца. Поэтому величина $\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2$ a fortiori положительна при $x < 0$. Тогда и подавно $\Gamma''(x)\Gamma(x) > 0$, и, значит, вторая производная $\Gamma''(x)$ всегда имеет знак самой $\Gamma(x)$.

Там, где $\Gamma(x) > 0$, и вторая производная $\Gamma''(x) > 0$, а, значит, функция Γ — выпукла. Там, где $\Gamma(x) < 0$, и вторая производная $\Gamma''(x) < 0$, а, значит, функция Γ — вогнута[1]). Отсюда мы получаем график Γ-функции, показанный на рис. VIII, 2.

6. Формула Стирлинга. Докажем формулу[2])

$$x! = \int_0^\infty e^{-t} t^x \, dt \sim x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x} \quad \text{при} \quad x \to \infty. \tag{VIII, 1; 28}$$

При фиксированном x логарифмическая производная функции $e^{-t}t^x$ от t равна $-1 + \frac{x}{t}$. Она отрицательна при $0 \leqslant t < x$, равна нулю при $t = x$ и положительна при $t > x$. Поэтому функция $e^{-t}t^x$ имеет максимум в точке $t = x$; этот максимум равен $x^x e^{-x}$. Естественно положить $t = x + u$, тогда

$$x! = x^x e^{-x} \int_{-x}^\infty e^{-u + x \lg\left(1 + \frac{u}{x}\right)} \, du. \tag{VIII, 1; 29}$$

Пока u мало по сравнению с x, справедлива оценка

$$-u + x \lg\left(1 + \frac{u}{x}\right) = -u + x\left[\frac{u}{x} - \frac{u^2}{2x^2} + O\left(\frac{|u|^3}{x^3}\right)\right] = -\frac{u^2}{2x} + O\left(\frac{|u|^3}{x^2}\right).$$

---

[1]) Неравенство $\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2 > 0$ показывает, что $\lg \Gamma$ является *выпуклой* функцией в любом интервале его определения.

[2]) Доказательство ведется „методом больших чисел" Лапласа, который лежит в основе метода перевала. См. Полиа Г. и Сегё Г., Задачи и теоремы из анализа, т. 1, второе издание, Гостехиздат, М., 1956, стр. 105, и след., а также Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, второе издание, Физматгиз, М., 1958, стр. 446 и след. — *Прим. перев.*

Пока $|u|$ остается сравнимым с $\sqrt{x}$ (x фиксировано), функция $e^{-u+x\lg\left(1+\frac{u}{x}\right)}$ переменного u, имеющая максимум, равный 1 при $u=0$, не становится бесконечно малой. Поэтому естественно положить $u=\sqrt{x}\,v$. Тогда

$$x!=x^x e^{-x}\sqrt{x}\int_{-\sqrt{x}}^{\infty} e^{-v\sqrt{x}+x\lg\left(1+\frac{v}{\sqrt{x}}\right)}dv. \qquad \text{(VIII, 1; 30)}$$

Таким образом, остается показать, что интеграл

$$I(x)=\int_{-\sqrt{x}}^{\infty} e^{-v\sqrt{x}+x\lg\left(1+\frac{v}{\sqrt{x}}\right)}dv \qquad \text{(VIII, 1; 31)}$$

стремится к $\sqrt{2\pi}$, когда x стремится к $+\infty$ по вещественной оси.

Мы имеем здесь интеграл типа

$$I(x)=\int_{-\infty}^{\infty} h(x, v)\,dv. \qquad \text{(VIII, 1; 32)}$$

Мы покажем, что подинтегральная функция $h(x, v)$ при фиксированном v стремится к некоторой суммируемой функции $h(v)$, когда $x\to\infty$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(v)\,dv=\sqrt{2\pi}. \qquad \text{(VIII, 1; 33)}$$

Мы покажем также, что $h(x, v)$ возрастает при возрастании x, когда $v<0$, и убывает, когда $v>0$. Поэтому функция $h(x, v)$ при $v\leqslant 0$ мажорируется своим суммируемым пределом $h(v)$, а при $v\geqslant 0$ функция $h(x, v)$ мажорируется (когда $x\geqslant 1$) суммируемой функцией $h(1, v)$. Поэтому достаточно применить теорему Лебега (гл. I, предложение 45, стр. 64) по отдельности к областям $v\leqslant 0$ и $v\geqslant 0$. При $x\to\infty$ и фиксированном v (в частности, $v>-\sqrt{x}$) имеем

$$-v\sqrt{x}+x\lg\left(1+\frac{v}{\sqrt{x}}\right)=-v\sqrt{x}+x\left[\frac{v}{\sqrt{x}}-\frac{v^2}{2x}+O\left(\frac{|v|^3}{x^{3/2}}\right)\right]=-\frac{v^2}{2}+O\left(\frac{|v|^3}{x^{3/2}}\right).$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty} h(x, v)=h(v)=e^{-\frac{v^2}{2}}$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}dv=\sqrt{2\pi} \quad \text{(интеграл Гаусса).} \qquad \text{(VIII, 1; 34)}$$

Что же касается свойств возрастания, то мы докажем их следующим образом.

Если $x_1 \leqslant x_2$, то при $v \leqslant -\sqrt{x_1}$ выполняется неравенство $h(x_1, v) \leqslant \leqslant h(x_2, v)$, поскольку в этой области значений v функция $h(x_1, v) = 0$, а функция $h(x_2, v) \geqslant 0$. Поэтому остается показать, что $\lg h(x, v)$ будет возрастающей функцией от $\sqrt{x}$ в области $0 \geqslant v \geqslant -\sqrt{x}$ и убывающей функцией от $\sqrt{x}$ в области $v \geqslant 0$. Иначе говоря, остается показать, что

$$\frac{\partial}{\partial(\sqrt{x})} \lg h(x, v) \geqslant 0 \text{ при} -\sqrt{x} \leqslant v \leqslant 0$$

и

$$\frac{\partial}{\partial(\sqrt{x})} \lg h(x, v) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad v \geqslant 0.$$

Поскольку производная $\frac{\partial}{\partial(\sqrt{x})} \lg h(x, v)$ равна нулю при $v = 0$ [ибо $h(x, 0) \equiv 1$], достаточно показать, что производная $\frac{\partial}{\partial(\sqrt{x})} \lg h(x, v)$ является убывающей функцией от v в области $v > -\sqrt{x}$. Иначе говоря, достаточно показать, что

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial}{\partial(\sqrt{x})} \lg h(x, v) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad v > -\sqrt{x}. \tag{VIII, 1; 35}$$

Эта производная вычисляется непосредственно (ее удобнее вычислять, изменив порядок дифференцирований):

$$\left.\begin{aligned} \lg h(x, v) &= -v\sqrt{x} + x \lg\left(1 + \frac{v}{\sqrt{x}}\right), \\ \frac{\partial}{\partial v} \lg h(x, v) &= -\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x} + v} = \frac{-\sqrt{x}\, v}{\sqrt{x} + v}, \\ \frac{\partial}{\partial(\sqrt{x})} \frac{\partial}{\partial v} \lg h(x, v) &= -\frac{v^2}{(v + \sqrt{x})^2} \leqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{VIII, 1; 36}$$

Ч. и т. д.

7. Применение к разложению функции $1/\Gamma$ в бесконечное произведение. Вычислим главную часть дроби

$$\frac{(x+t)!}{t!} \sim \frac{\Gamma(x+t)}{\Gamma(t)} \tag{VIII, 1; 37}$$

при фиксированном x и $t \to \infty$. Формула Стирлинга приводит к асимптотике

$$\frac{(x+t)!}{t!} \sim \frac{(x+t)^{x+t} e^{-x-t} \sqrt{2\pi(x+t)}}{t^t e^{-t} \sqrt{2\pi t}} \sim t^x \left(1+\frac{x}{t}\right)^{x+t} e^{-x}. \quad \text{(VIII, 1; 38)}$$

Но величина $\left(1+\frac{x}{t}\right)^{x+t} = \left(1+\frac{x}{t}\right)^x \left(1+\frac{x}{t}\right)^t$ стремится к $1 \cdot e^x$, когда $t \to \infty$.

Поэтому окончательно имеем

$$\frac{\Gamma(x+t)}{\Gamma(t)} \sim t^x \quad \text{при} \quad t \to \infty. \quad \text{(VIII, 1; 39)}$$

Положим, в частности, t равным целому числу n; тогда

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)} = \frac{(x+n-1)(x+n-2)\ldots(x+1)\,x\Gamma(x)}{(n-1)(n-2)\ldots 1} =$$

$$= \left(1+\frac{x}{n-1}\right)\left(1+\frac{x}{n-2}\right)\ldots(1+x)\,x\Gamma(x). \quad \text{(VIII, 1; 40)}$$

Из соотношений (VIII, 1; 39) и (VIII, 1; 40) вытекает равенство

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to\infty}\left[x\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)n^{-x}\right]. \quad \text{(VIII, 1; 41)}$$

Но $n^{-x} = e^{-x \lg n} = e^{-x\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)+\gamma_n x}$, где величина γ_n стремится к эйлеровой постоянной γ, когда $n \to \infty$.

Поэтому

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = e^{\gamma x} x \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{1}\right)e^{-\frac{x}{1}}\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}\ldots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)e^{-\frac{x}{n-1}}\right] \quad \text{(VIII, 1; 42)}$$

или

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = e^{\gamma x} x \prod_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right). \quad \text{(VIII, 1; 43)}$$

Понятие бесконечного произведения

Для бесконечных рядов существуют понятия суммируемости („абсолютной“ сходимости) и сходимости (только в случае, когда множество индексов является множеством N целых чисел). Аналогично этому бесконечные произведения делятся на „мультиплицируемые“ и „сходящиеся“ [1]).

[1]) В оригинале „sommable“ и „multipliable“. Русский термин для бесконечных произведений отсутствует. За неимением лучшего мы употребляем в переводе термин „мультиплицируемое“ произведение, который меньше режет слух, чем, скажем, термин „перемножимое“ произведение. — *Прим. перев.*

Только мультиплицируемые произведения имеют практический интерес, даже в случае, когда множество индексов совпадает с N, их часто называют абсолютно сходящимися или даже просто сходящимися.

Произведение $\prod_{i\in I} u_i$ *называется мультиплицируемым, если выполняются следующие два требования:*

все члены произведения отличны от нуля ($u_i \neq 0$),

существует такое число $P \neq 0$ (*значение бесконечного произведения*), *что для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется конечное множество значений индекса* $J \subset I$, *такое, что для любого конечного множества значений индекса* $K \supset J$ *выполняется неравенство*

$$\left|\frac{\Pi_K}{P} - 1\right| \leqslant \varepsilon \quad \left(\Pi_K = \prod_{i\in K} u_i\right). \qquad \text{(VIII, 1; 44)}$$

Заметим, что, согласно этой формулировке, бесконечное произведение, „сходящееся к 0" (в очевидном смысле), должно рассматриваться как *расходящееся.*

Свойства мультиплицируемых произведений аналогичны свойствам суммируемых рядов, роль числа 0 в случае рядов принимает на себя в случае произведений число 1.

Отметим следующие свойства:

1. Для того чтобы произведение $\prod_{i\in I} u_i$ было мультиплицируемым, необходимо, чтобы его общий член u_i *стремился* к 1, т. е. необходимо, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало конечное множество $J \subset I$, такое, что $|u_i - 1| \leqslant \varepsilon$ при $i \notin J$.

2. Критерий Коши. Для того чтобы произведение $\prod_{i\in I} u_i$ было мультиплицируемым, необходимо и достаточно, чтобы все его члены u_i были отличны от нуля и чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало конечное множество $J \subset I$, такое, что $|\Pi_K - 1| \leqslant \varepsilon$ для любого конечного множества K, не пересекающегося с J ($K \cap J = \varnothing$).

3. Перемножение пачками. Пусть A — некоторое множество индексов α, и пусть $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ — разбиение множества I на конечные или бесконечные подмножества, не имеющие попарно общих элементов. Пусть, наконец, произведение $\prod_{i\in I} u_i$ мультиплицируемо. Тогда произведение $\prod_{i\in I_\alpha} u_i$ мультиплицируемо при любом $\alpha \in A$; если P_α — его значение, то произведение $\prod_{\alpha\in A} P_\alpha$

в свою очередь мультиплицируемо, причем выполняется равенство

$$\prod_{i\in I} u_i = \prod_{\alpha\in A} P_\alpha = \prod_{\alpha\in A}\left(\prod_{i\in I_\alpha} u_i\right). \tag{VIII, 1; 45}$$

Если же произведение $\prod\limits_{i\in I} u_i$ не мультиплицируемо, то обе части этого равенства все равно будут совпадать в следующих двух случаях:

a) в случае, когда все члены $u_i \geqslant 1$, если величину расходящегося произведения с такими членами считать равной $+\infty$;

b) в случае, когда все члены удовлетворяют неравенству $0 < u_i \leqslant 1$, если величину расходящегося произведения с такими членами считать равной 0.

Эти теоремы можно доказать непосредственно, по аналогии с теоремами для рядов.

Удобнее, однако, свести их к теоремам о рядах, используя для этой цели логарифмы. По правде говоря, логарифмы $\lg u_i$ не определены однозначно при комплексных u_i или хотя бы при отрицательных u_i.

Но ведь мы знаем, что если члены u_i не стремятся к 1, то произведение расходится. Если же члены u_i стремятся к 1, то неравенство $|u_i - 1| < 1$ выполняется для всех членов, кроме, быть может, конечного числа. *Это конечное число членов можно не рассматривать.*

Выделим в круге $|z-1| < 1$ непрерывную однозначную ветвь функции $\lg z$, обращающуюся в нуль в точке $z=1$. Тогда суммируемость ряда $\sum\limits_{i\in I} \lg u_i$ будет необходимым и достаточным условием для сходимости произведения $\prod\limits_{i\in I} u_i$.

В самом деле,

a) каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое $\eta > 0$, что при выполнении неравенства $|\xi| \leqslant \eta$ выполняется неравенство $|e^{\xi} - 1| \leqslant \varepsilon$ (непрерывность экспоненты).

Пусть теперь ряд $\sum\limits_{i\in I} \lg u_i$ суммируем, тогда существует конечное множество $J \subset I$, такое, что $|\Sigma_K| \leqslant \eta$, если $K \cap J = \varnothing$.

Следовательно, $|\Pi_K - 1| = |e^{\Sigma_K} - 1| \leqslant \varepsilon$, и, значит, произведение $\prod\limits_{i\in I} u_i$ мультиплицируемо.

b) каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое $\eta > 0$, что при выполнении неравенства $|\xi - 1| \leqslant \eta$ выполняется неравенство $|\lg \xi| \leqslant \varepsilon$ для ветви логарифма, выбранной выше (непрерывность логарифма).

Пусть теперь произведение $\prod_{i \in I} u_i$ мультиплицируемо. Тогда существует конечное множество $J \subset I$, такое, что $|\Pi_K - 1| \leqslant \eta$, если $K \cap J = \varnothing$. Следовательно, $|\Sigma_K| = |\lg \Pi_K| \leqslant \varepsilon$, и, значит, ряд $\sum_{i \in I} \lg u_i$ суммируем.

Отсюда вытекает важное следствие.

Для того чтобы бесконечное произведение $\prod_{i \in I} (1 + v_i)$ было мультиплицируемо, необходимо и достаточно, чтобы все его члены $1 + v_i$ были отличны от нуля и чтобы ряд $\sum_{i \in I} v_i$ был суммируем.

С самого начала необходимо, чтобы добавка v_i стремилась к нулю, для того чтобы общий член $1 + v_i$ стремился к 1. Если же это условие выполнено, для мультиплицируемости необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum_{i \in I} \lg (1 + v_i)$ был суммируем. Но ведь $\lg (1 + v) \sim v$ при $v \to 0$, а мы знаем, что для выяснения суммируемости можно заменить общий член $\lg (1 + v_i)$ эквивалентным ему членом v_i. Поэтому суммируемость ряда $\sum_{i \in I} v_i$ необходима и достаточна для мультиплицируемости произведения $\prod_{i \in I} (1 + v_i)$.

Ч. и т. д.

Примеры

Произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 \pm \frac{1}{n^\alpha}\right) \tag{VIII, 1; 46}$$

сходится, если $\alpha > 1$, и расходится, если $0 < \alpha \leqslant 1$.

В частности,

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \infty \quad \text{(расходящееся произведение),}$$

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0 \quad \text{(расходящееся произведение).}$$

Две последние формулы очевидны непосредственно (и даже более очевидны, чем расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$):

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \ldots \frac{n+1}{n} = n + 1 \to \infty,$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \ldots \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} \to 0.$$

Сходимость произведения для **$1/\Gamma$** Бесконечное произведение $e^{\gamma z} z \prod_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right)$ мультиплицируемо при любом значении z, при котором ни один из его членов не равен нулю (т. е. при $z \neq 0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots$), и притом равномерно на любом ограниченном множестве в комплексной плоскости, не содержащем ни одной из этих точек $\left(\text{в которых } \frac{1}{\Gamma(z)}=0\right)$.

В самом деле, при ограниченном z имеет место равномерная оценка

$$\lg\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right]=\lg\left(1+\frac{z}{n}\right)-\frac{z}{n}=\frac{z}{n}+O\left(\frac{|z|^2}{n^2}\right)-\frac{z}{n}=O\left(\frac{|z|^2}{n^2}\right),$$

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ — суммируем.

Тем самым это бесконечное произведение представляет собой некоторую голоморфную целую функцию комплексного переменного z, совпадающую с $1/\Gamma(z)$, при вещественных положительных z ($z=x>0$). Следовательно, оно совпадает с $1/\Gamma(z)$ при всех z (сама $\Gamma(z)$ мероморфна). Это показывает, во-первых, что функция $1/\Gamma(z)$ представляется при любом z данным бесконечным произведением (которому приписывается значение 0 при $z=0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots$, ибо при этом один из членов произведения равен нулю, а произведение остальных членов конечно); и, во-вторых, это показывает, что $1/\Gamma(z)$ — голоморфная целая функция, а значит, $\Gamma(z)$ не обращается в нуль ни при каком значении z.

8. Функция $\Psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$. Возьмем логарифмические производные от обеих частей равенства

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=e^{\gamma z}z\prod_{k=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}\right),$$

тогда получим

$$-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+k}-\frac{1}{k}\right)+\gamma. \qquad \text{(VIII.1; 47)}$$

Эта формула будет справедливой, если полученный ряд равномерно сходится при ограниченном z, не равном $0, -1, -2, \ldots$. Последнее требование

действительно выполняется, ибо величина

$$\left|\frac{1}{z+k}-\frac{1}{k}\right|=\left|\frac{-z}{k(z+k)}\right|=\left|\frac{z}{k^2(1+z/k)}\right|$$

мажорируется величиной $\frac{2\sup|z|}{k^2}$ при $k>2\sup|z|$.

То, что мы получили, является „разложением на простейшие дроби“ функции $-\Gamma'(z)/\Gamma(z)$, имеющей полюсы в точках $z=0, -1, -2, \ldots$ с вычетами, равными 1. При произвольном z полагают

$$\Psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \qquad \text{(VIII, 1; 48)}$$

Устремляя в формуле (VIII, 1; 17) показатель p к 0 и оставляя показатель $q=z$ фиксированным, можно доказать формулу

$$\Psi(z)=-\gamma+\int_0^1\frac{1-(1-t)^{z-1}}{t}\,dt \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} z>0. \qquad \text{(VIII, 1; 49)}$$

Этот интеграл вычисляется элементарно при любом рациональном значении z.

В частности, имеем

$$-\Gamma'(1)=1+\left[\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\ldots\right]+\gamma$$

или

$$\Gamma'(1)=-\gamma.$$

Таким образом,

$$\boxed{\Gamma'(1)=\int_0^\infty e^{-t}\lg t\,dt=-\gamma.} \qquad \text{(VIII, 1; 50)}$$

Далее,

$$-\frac{\Gamma'(2)}{\Gamma(2)}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}-1\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\ldots+\gamma,$$

или

$$-\frac{\Gamma'(2)}{\Gamma(2)}=-1+\gamma,$$

и, значит,

$$\boxed{\Gamma'(2)=\int_0^\infty e^{-t}\,t\lg t\,dt=1-\gamma.} \qquad \text{(VIII, 1; 51)}$$

При целом $p \geqslant 2$ имеем

$$\Gamma'(p) = (p-1)!\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1} - \gamma\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} \lg t\, dt. \tag{VIII, 1; 52}$$

Продифференцируем равенство (VIII, 1; 47) еще раз:

$$\frac{\Gamma\Gamma'' - \Gamma'^2}{\Gamma^2} = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+k}\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z+k}\right)^2. \tag{VIII, 1; 53}$$

Этот ряд равномерно сходится при ограниченных z, отличных от полюсов.

З а м е ч а н и е. При вещественном $z = x$ (отличном от полюсов) $\Gamma\Gamma'' - \Gamma'^2 > 0$, как мы уже видели на стр. 363.

Наконец,

$$\Gamma''(1) = \gamma^2 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2} = \gamma^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} =$$

$$= \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} \text{ [согласно формуле (VIII, 1; 63)]} = \int_0^\infty e^{-t}(\lg t)^2\, dt. \tag{VIII, 1; 54}$$

9. Применения. Имеем

Разложение функции Γ'/Γ по возрастающим степеням z в окрестности точки $z = 0$

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{z} - \gamma - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p \frac{z^p}{n^{p+1}}\right]. \tag{VIII, 1; 55}$$

Если бы мы имели право изменить порядок суммирований, то мы получили бы формулу

$$\boxed{\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{z} - \gamma + \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p+1} z^p \zeta(p+1),} \tag{VIII, 1; 56}$$

где

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}.$$

Мы имеем здесь двойной ряд (ряд с двойными индексами). Мы будем иметь право обратить порядок суммирований, если весь двойной ряд абсолютно

сходится. Но ведь общий член $u_{n,p}$ двойного ряда можно оценить по модулю

$$|u_{n,p}| = \frac{|z|^p}{n^{p+1}} \leqslant \frac{|z|^p}{n^2}.$$

Ряд с членами $|z|^p/n^2$ сходится при $|z| < 1$, как произведение ряда $\sum |z|^p$ (сходящегося при $|z| < 1$) и ряда $\sum \frac{1}{n^2}$. Радиус сходимости ряда (VIII, 1; 56) равен 1. Ниже мы увидим [см. (VIII, 1; 63)], чему равны значения $\zeta(\alpha)$ при целых четных α.

Разложение $\sin z$ ***в бесконечное произведение***

Имеем

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = \frac{1}{\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)} = -\frac{1}{z}\,\frac{1}{\Gamma(z)\,\Gamma(-z)}, \qquad \text{(VIII, 1; 57)}$$

откуда, перемножая разложения функций $\Gamma(z)$ и $\Gamma(-z)$, получаем формулу

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \left(1-\frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}\right] = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{z^2}{n^2}\right). \qquad \text{(VIII, 1; 58)}$$

Разложение, стоящее в правой части, мультиплицируемо при любом $z \neq 0$, $1, 2, \ldots, n, \ldots, -1, -2, \ldots, -n, \ldots$, и притом равномерно при ограниченном z, отличном от этих значений, поскольку $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$. Это произведение будет представлять функцию $\sin \pi z$ при любом z, если приписать ему, как это делалось ранее, значение 0 при целых z.

Мы получили разложение $\sin \pi z$ на множители, аналогичное разложению полинома. Из этого разложения получаем формулу

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right). \qquad \text{(VIII, 1; 59)}$$

Разложение $\operatorname{ctg} z$ ***на простейшие дроби***

Возьмем логарифмическую производную от этого произведения (обоснование аналогично обоснованию на стр. 370—371), получим

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi}\right). \qquad \text{(VIII, 1; 60)}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi} \sim -\frac{2z}{n^2\pi^2}$$

при $n \to \infty$, что и делает ряд суммируемым. Однако ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - n\pi}$ не суммируем.

Равенство (VIII, 1; 60) дает разложение функции $\operatorname{ctg} z$ на простейшие дроби. Полюсы с вычетами, равными 1, расположены в точках $z = n\pi$ (n меняется от $-\infty$ до $+\infty$).

Разложение $\operatorname{ctg} z$ ***по степеням*** z

Разлагая члены ряда (VIII, 1; 60) по степеням z, получим разложение

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} - \frac{2}{\pi^2}\zeta(2)\, z - \ldots - \frac{2}{\pi^{2p}}\zeta(2p)\, z^{2p-1} - \ldots, \qquad \text{(VIII, 1; 61)}$$

которое справедливо при $|z| < \pi$. (Обоснование — аналогичное обоснованию на стр. 372—373.)

Но ведь разложение функции $\operatorname{ctg} z$ можно получить и непосредственно, деля друг на друга разложение функций $\cos z$ и $\sin z$:

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} - \frac{2z^5}{945} - \frac{z^7}{4725} - \ldots. \qquad \text{(VIII, 1; 62)}$$

Все коэффициенты этого разложения суть рациональные числа. Поэтому величины $\zeta(2p)/\pi^{2p}$ рациональны. Их можно вычислить последовательно:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}, \ \ldots. \qquad \text{(VIII, 1; 63)}$$

При численном вычислении интегралов по формуле Эйлера — Маклорена [1]) используют коэффициенты разложения функции $\frac{1}{e^z - 1}$ по степеням z:

$$\frac{1}{e^z - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{z}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\operatorname{ctg}\frac{iz}{2} =$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2^{2p-1}\pi^{2p}} \cdot \zeta(2p)\, z^{2p-1} \quad \text{при} \quad |z| < 2\pi, \qquad \text{(VIII, 1; 64)}$$

которое записывают в виде

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1} B_p}{(2p)!} z^{2p-1}, \qquad \text{(VIII, 1; 65)}$$

---

[1]) См. Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, т. I, § 7.21, второе издание, Физматгиз, М., 1962. — *Прим. перев.*

где

$$B_p = 2\,\frac{(2p)!\,\zeta(2p)}{(2\pi)^{2p}}. \qquad \text{(VIII, 1; 66)}$$

Числа B_p называются числами Бернулли:

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad \ldots . \qquad \text{(VIII, 1; 67)}$$

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VIII

Упражнение VIII-1. С помощью Г-функции показать, что

$$\int_0^\infty e^{-x} \lg x\, dx = -\gamma,$$

где γ — постоянная Эйлера. Напомним, что $\Psi(1) = -\gamma$, где $\Psi(x)$ — логарифмическая производная функции $\Gamma(x)$. Обосновать все дифференцирования, выполненные под знаком суммы.

Упражнение VIII-2. Рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\, e^{-n^2x^2}.$$

Нарисовать ход кривых $y = f_n(x)$. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_n(x)\, dx = \varphi(0)$$

для любой непрерывной функции $\varphi(x)$, обращающейся в нуль вне некоторого интервала $[-A, A]$.

Из равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, e^{-px}\, dx = e^{\frac{p^2}{1\;2}}$$

(p — произвольное вещественное число) вывести сумму ряда

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma(m+1)}.$$

Упражнение VIII-3. Положим

$$f(p)=\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{p-1}{p}\right)\Gamma(1).$$

Пользуясь формулой дополнения, показать, что

$$f(p)=\sqrt{\frac{(2\pi)^{p-1}}{p}}.$$

Упражнение VIII-4. Пусть V_n — определитель Вандермонда:

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2^2 & \ldots & n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2^{n-1} & \ldots & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Показать, что $\lg V_n$ эквивалентен

$$\frac{n^2}{2}\lg n-\frac{3n^2}{4}+\frac{n}{2}\lg 2\pi-\frac{1}{12}\lg n$$

при $n\to\infty$.

Упражнение VIII-5. Заменой переменных

$$u=x^{\alpha/2},\quad v=y^{\beta/2},\quad w=z^{\gamma/2}$$

вычислить интеграл

$$\int\int\int\frac{dx\,dy\,dz}{1+x^\alpha+y^\beta+z^\gamma},$$

взятый по первому октанту $x>0$, $y>0$, $z>0$.

При каких значениях α, β, γ этот интеграл сходится?

Упражнение VIII-6. Вычислить интегралы

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\operatorname{ch} t\,dt \quad \text{и} \quad \int_0^\infty e^{-t^2}\cos t\,dt$$

(воспользоваться разложениями функций $\operatorname{ch} t$ и $\cos t$ в ряды).

Упражнение VIII-7. Вычислить и сравнить интегралы

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,dx \quad \text{и} \quad \int_0^\infty e^{-x^2}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Упражнение VIII-8. Показать, что

$$\Gamma(2p)=\frac{2^{2p-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right).$$

Упражнение VIII-9. Пусть функция $\Gamma(x)$ определена интегралом

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

при $x>0$. Положим

$$\varphi(x)=\lg\Gamma(x).$$

1°. Показать, что $\varphi(x)$ — выпуклая функция x при $x>0$, т. е.

$$\frac{\varphi(x_1)+\lambda\varphi(x_2)}{1+\lambda}\geqslant\varphi\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\right)$$

при любых x_1, x_2, $\lambda>0$, или же $\varphi''(x)\geqslant 0$ при любом $x>0$ (если эта производная существует).

2°. Функция $\varphi(x)$ является единственной выпуклой функцией $g(x)$, определенной при $x>0$ и удовлетворяющей условиям

$$g(x+1)-g(x)=\lg x, \tag{1}$$

$$g(1)=0. \tag{2}$$

a) Из выпуклости $g(x)$ следуют неравенства

$$g(n)-g(n-1)\leqslant\frac{g(n+x)-g(n)}{x}\leqslant g(n+1)-g(n),$$

где $0<x\leqslant 1$, n — целое число >1.

b) Если положить

$$U_n(x)=x\lg\frac{n}{n-1}-\lg(x+n-1)+\lg(n-1)$$

и

$$g_n(x)=-\lg x+\sum_{k=2}^{n}U_k(x),$$

то

$$g_n(x)-x\lg\frac{n}{n-1}\leqslant g(x)\leqslant g_n(x)$$

при $0<x\leqslant 1$.

c) Вывести отсюда, что ряд $g(x) = -\lg x + \sum_{n=2}^{\infty} U_n(x)$ сходится при всех $x > 0$ и определяет выпуклую функцию $g(x)$, удовлетворяющую условиям (1) и (2). Следовательно, $g(x) = \varphi(x)$.

3°. a) Из пункта 2° вытекает, что

$$\Gamma(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

при $x > 0$. Можно ли распространить эту формулу на значения $x < 0$?

b) Показать, что ряд с членами $V_n = \frac{1}{n} - \lg \frac{n+1}{n}$ сходится абсолютно. Положить

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n = C.$$

c) Показать, что

$$\Gamma(x) = e^{-Cx} \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1 + \frac{x}{n}},$$

причем это бесконечное произведение сходится абсолютно и равномерно на любом интервале $a \leqslant x \leqslant b$ вещественной оси R, не содержащем никакого целого отрицательного числа.

4°. Показать, что функция $\Gamma(x)$ бесконечно дифференцируема и что при $x > 0$ имеют место равенства

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \right)$$

и

$$\frac{d^k}{dx^k} [\lg \Gamma(x)] = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k-1)!}{(x+n)^k} \quad \text{при} \quad k \geqslant 2.$$

Показать, что для любого целого $q > 1$ и для любого целого k, такого, что $1 \leqslant k \leqslant q - 1$, выполняется равенство

$$\sum_{p=1}^{q} \frac{\Gamma'(p/q)}{\Gamma(p/q)} e^{2ip\frac{k\pi}{q}} = -q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{2in\frac{k\pi}{q}} = q \lg \left(1 - e^{2i\frac{k\pi}{q}}\right).$$

ГЛАВА IX

ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

§ 1. *Определение и элементарные свойства*

1. Определение функций Бесселя; функции Неймана и Ганкеля. Для простоты будем считать x вещественным положительным числом ($x > 0$)[1]. *Уравнением Бесселя* называется уравнение

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0, \qquad \text{(IX, 1; 1)}$$

где ν — данное комплексное число, вещественную часть которого всегда можно считать неотрицательной ($\operatorname{Re}\nu \geqslant 0$).

Обычные решения этого уравнения будем искать в виде

$$y = x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \qquad \text{(IX, 1; 2)}$$

Левая часть уравнения (IX, 1; 1) приобретает при этом вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{(k+\lambda)^2 - \nu^2\}\, a_k x^{k+\lambda-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\lambda}. \qquad \text{(IX, 1; 3)}$$

Для того чтобы ряд (IX, 1; 2) был решением уравнения (IX, 1; 1), должно поэтому выполняться равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{(k+\lambda)^2 - \nu^2\}\, a_k x^{k+\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\lambda+2} \equiv 0. \qquad \text{(IX, 1; 4)}$$

---

[1]) Мы делаем это предположение, чтобы фиксировать идеи и упростить доказательства. В действительности же почти все устанавливаемые здесь результаты, и в частности результаты пунктов 1, 2 и 3, справедливы при произвольном комплексном x.

Записав, что коэффициенты при членах с x^λ, $x^{\lambda+1}$ и $x^{k+\lambda}$ с $k \geqslant 2$ равны нулю, получим соотношения

$$(\lambda^2 - \nu^2)\, a_0 = 0, \qquad \text{(IX, 1; 5)}$$

$$\{(1+\lambda)^2 - \nu^2\}\, a_1 = 0, \qquad \text{(IX, 1; 6)}$$

$$\{(k+\lambda)^2 - \nu^2\}\, a_k + a_{k-2} = 0 \quad \text{при} \quad k \geqslant 2. \qquad \text{(IX, 1; 7)}$$

Коэффициент a_0 в разложении (IX, 1; 2) всегда можно считать отличным от нуля ($a_0 \neq 0$) [если условиться обозначать $a_0 x^\lambda$ первый, отличный от нуля, член разложения (IX, 1; 2)]. Поэтому уравнение (IX, 1; 5) дает значения λ:

$$\lambda = \pm\, \nu. \qquad \text{(IX, 1; 8)}$$

Найдем сначала решение, соответствующее $\lambda = \nu$. Перепишем уравнения (IX, 1; 6) и (IX, 1; 7) в виде

$$(2\nu + 1)\, a_1 = 0, \qquad \text{(IX, 1; 9)}$$

$$k(k+2\nu)\, a_k + a_{k-2} = 0, \qquad k \geqslant 2. \qquad \text{(IX, 1; 10)}$$

Из соотношений (IX, 1; 9) и (IX, 1; 10) вытекает, что все коэффициенты с нечетными индексами равны нулю. Что же касается коэффициентов с четными индексами a_{2n} при $n \geqslant 1$, то их легко получить из уравнения (IX, 1; 10):

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n!\, (\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+n)}, \qquad n \geqslant 1. \qquad \text{(IX, 1; 11)}$$

Положив

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}, \qquad \text{(IX, 1; 12)}$$

получим

$$a_{2n} = \frac{1}{2^\nu} \frac{1}{2^{2n}} \frac{(-1)^n}{n!\, \Gamma(\nu+n+1)} \qquad \text{(IX, 1; 13)}$$

и запишем разложение (IX, 1; 2):

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\, \Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}. \qquad \text{(IX, 1; 14)}$$

Разложение в правой части, очевидно, сходится при любом x и притом равномерно на любом ограниченном интервале. *Функцией Бесселя с индексом* ν *называется функция* $J_\nu(x)$, *определяемая равенством* (IX, 1; 14).

Разберем теперь случай $\lambda = -\nu$. Уравнения (IX, 1; 6) и (IX, 1; 7) приобретают вид

$$(-2\nu + 1) a_1 = 0, \qquad \text{(IX, 1; 15)}$$

$$k(k - 2\nu) a_k + a_{k-2} = 0, \qquad k \geqslant 2. \qquad \text{(IX, 1; 16)}$$

При ν, отличном от целого числа, положим

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}. \qquad \text{(IX, 1; 17)}$$

[Это равенство получается из равенства (IX, 1; 14) заменой ν на $-\nu$.] Легко проверить, что коэффициенты a_k функции $J_{-\nu}(x)$ удовлетворяют соотношениям (IX, 1; 15) и (IX, 1; 16) и что, следовательно, функция $J_{-\nu}(x)$ является решением уравнения (IX, 1; 1). Если же ν — некоторое целое число $p \geqslant 1$, то формула (IX, 1; 17) приобретает вид

$$J_{-p}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{n=p}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \qquad \text{(IX, 1; 18)}$$

поскольку полюсы Г-функции расположены как раз в целых неположительных точках.

Полагая $k = n - p$, получим

$$J_{-p}(x) = (-1)^p \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+p+1)} = (-1)^p J_p(x). \qquad \text{(IX, 1; 19)}$$

В случае, когда ν не является целым неотрицательным числом ($\nu \neq 0, 1, 2, \ldots$), решения (IX, 1; 14) и (IX, 1; 17) уравнения (IX, 1; 1) линейно независимы. [Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что при $x \to 0$ функция $J_\nu(x)$ стремится к нулю как x^ν, $\operatorname{Re}\nu > 0$, а функция $J_{-\nu}(x)$ стремится к бесконечности как $x^{-\nu}$.]

В этом случае общее решение уравнения (IX, 1; 1) имеет вид

$$AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x), \qquad \text{(IX, 1; 20)}$$

где A и B — постоянные.

В случае, когда ν — целое неотрицательное число ($\nu \geqslant 0$), функции J_p и J_{-p} связаны соотношением (IX, 1; 19), и мы должны отыскать второе решение уравнения (IX, 1; 1), не зависящее линейно от J_p.

Функции Неймана

При нецелом ν мы назовем функцией Неймана с индексом ν функцию

$$N_\nu(x) = \frac{\cos \nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}. \qquad \text{(IX, 1; 21)}$$

При целом $\nu = p$ положим

$$N_p(x) = \lim_{\nu \to p} N_\nu(x). \qquad \text{(IX, 1; 22)}$$

Числитель и знаменатель в правой части равенства (IX, 1; 21) являются аналитическими функциями от ν, поскольку функция $\nu \to J_\nu(x)$ при любом вещественном $x > 0$ является аналитической функцией от ν, и, значит, по правилу Лопиталя, имеем

$$N_p(x) = \lim_{\nu \to p} \left\{ \frac{\frac{\partial}{\partial \nu}(\cos \nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x))}{\pi \cos \nu\pi} \right\},$$

откуда

$$\pi N_p(x) = \lim_{\nu \to p} \left\{ \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x) - (-1)^p \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(x) \right\}. \qquad \text{(IX, 1; 23)}$$

Из равенства (IX, 1; 23) вытекает, что при любом целом $m \geqslant 0$ справедливо равенство

$$\frac{d^m}{dx^m}(\pi N_p(x)) = \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\partial^m}{\partial x^m} J_\nu(x) \right) \right]_{\nu = p} - (-1)^p \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\partial^m}{\partial x^m} J_{-\nu}(x) \right) \right]_{\nu = p}. \qquad \text{(IX, 1; 24)}$$

Вычислим сначала $\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x)$.

Имеем

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2} \right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k}, \qquad \text{(IX, 1; 14)}$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x) = \left(\lg \frac{x}{2} \right) J_\nu(x) + \left(\frac{x}{2} \right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2} \right)^{2k} \frac{1}{k!} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{\Gamma(\nu + k + 1)} \right). \qquad \text{(IX, 1; 25)}$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{\Gamma(\nu + k + 1)} = -\frac{\Gamma'(\nu + k + 1)}{\Gamma^2(\nu + k + 1)} \qquad \text{(IX, 1; 26)}$$

и, согласно формуле (VIII, 1; 47),

$$-\frac{\Gamma'(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+k+1)}=\frac{1}{\nu+k+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\nu+k+1+n}-\frac{1}{n}\right\}+\gamma. \quad \text{(IX, 1; 27)}$$

Устремим ν к целому числу p.

Если $p=0$, то правая часть равенства (IX, 1; 27) будет стремиться к γ при $k=0$ и к величине

$$-\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}+\gamma \quad \text{(IX, 1; 28)}$$

при $k\neq 0$.

Если же $p>0$, то правая часть равенства (IX, 1; 27) при любом k будет стремиться к величине

$$-\sum_{n=1}^{p+k}\frac{1}{n}+\gamma. \quad \text{(IX, 1; 29)}$$

Следовательно, при $\nu\to p$ производная $\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(x)$ будет стремиться к выражению

$$\left(\lg\frac{x}{2}+\gamma\right)J_0(x)-\sum_{k=1}^{\infty}\left\{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\frac{1}{(k!)^2}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}\right\}, \quad \text{(IX, 1; 30)}$$

если $p=0$, и к выражению

$$\left(\lg\frac{x}{2}+\gamma\right)J_p(x)-\left(\frac{x}{2}\right)^p\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\frac{1}{k!}\,\frac{1}{\Gamma(p+k+1)}\sum_{n=1}^{p+k}\frac{1}{n}\right\}, \quad \text{(IX, 1; 31)}$$

если $p\neq 0$.

Вычислим теперь $\frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(x)$.

Из равенства (IX, 1; 17) легко получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(x)=-\lg\frac{x}{2}J_{-\nu}(x)+\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\frac{1}{k!}\,\frac{\Gamma'(-\nu+k+1)}{\Gamma^2(-\nu+k+1)}. \quad \text{(IX, 1; 32)}$$

В силу сказанного ранее производная $\frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(x)$ при $\nu \to 0$ будет стремиться к выражению

$$-\lg \frac{x}{2} J_0(x) - \gamma J_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{1}{(k!)^2} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \right\}. \qquad (IX, 1; 33)$$

Тогда из равенств (IX, 1; 23), (IX, 1; 30) и (IX, 1; 33) получаем формулу

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\lg \frac{x}{2} + \gamma\right) J_0(x) - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{1}{(k!)^2} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \right\}. \qquad (IX, 1; 34)$$

Предположим теперь, что ν стремится к целому числу $p > 0$.

Рассмотрим сначала члены с $k \geqslant p$ в ряде, который стоит в правой части равенства (IX, 1; 32). В силу предыдущего ряд

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{1}{k!\, \Gamma(-\nu+k+1)} \cdot \frac{\Gamma'(-\nu+k+1)}{\Gamma(-\nu+k+1)}$$

при $\nu \to p$ стремится к выражению

$$(-1)^p \left\{ -\gamma J_p(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{1}{k!\, \Gamma(k+p+1)} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \right\}. \qquad (IX, 1; 35)$$

Остается рассмотреть члены

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{1}{k!} \frac{\Gamma'(-\nu+k+1)}{\Gamma^2(-\nu+k+1)}. \qquad (IX, 1; 36)$$

Согласно формулам (VIII, 1; 7) и (VIII, 1; 47), дробь

$$\frac{\Gamma'(-\nu+k+1)}{\Gamma^2(-\nu+k+1)}$$

при $0 \leqslant k \leqslant p-1$ стремится к выражению

$$(-1)^{p-k} (p-k-1)!, \qquad (IX, 1; 37)$$

когда $\nu \to p$. Следовательно, сумма (IX, 1; 36) стремится к сумме

$$(-1)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{1}{k!} (p-k-1)!. \qquad (IX, 1; 38)$$

Из формул (IX, 1; 23), (IX, 1; 31), (IX, 1; 32), (IX, 1; 36) и (IX, 1; 38) вытекает формула

$$\pi N_p(x) = 2\left(\lg\frac{x}{2} + \gamma\right) J_p(x) - \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{1}{k!}(p-k-1)! -$$

$$- \left(\frac{x}{2}\right)^p \frac{1}{p!} \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} - \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(p+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \left(\sum_{n=1}^{k} \frac{2}{n} + \sum_{n=k+1}^{p+k} \frac{1}{n}\right). \quad \text{(IX, 1; 39)}$$

Остается показать, что функция $N_p(x)$ при целом $p \geqslant 0$ является решением уравнения (IX, 1; 1) линейно независимым от $J_p(x)$. Первое утверждение вытекает из равенства (IX, 1; 24). Докажем это утверждение иным способом; продифференцируем по ν тождество относительно ν:

$$\frac{d^2}{dx^2} J_\nu(x) + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} J_\nu(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) J_\nu(x) = 0. \quad \text{(IX, 1; 40)}$$

Получим

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial}{\partial\nu} J_\nu(x) + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial\nu} J_\nu(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)\frac{\partial}{\partial\nu} J_\nu(x) = \frac{2\nu}{x^2} J_\nu(x).$$

(IX, 1; 41)

Аналогично получим

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial}{\partial\nu} J_{-\nu}(x) + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial\nu} J_{-\nu}(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)\frac{\partial}{\partial\nu} J_{-\nu}(x) = \frac{2\nu}{x^2} J_{-\nu}(x).$$

(IX, 1; 42)

Отсюда, полагая

$$F_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial\nu} J_\nu(x) - (-1)^p \frac{\partial}{\partial\nu} J_{-\nu}(x)\right), \quad \text{(IX, 1; 43)}$$

получим

$$\frac{d^2}{dx^2} F_\nu(x) + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} F_\nu(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) F_\nu(x) = \frac{2\nu}{x}(J_\nu(x) - (-1)^p J_{-\nu}(x)).$$

(IX, 1; 44)

Устремим ν к p. Учитывая равенства (IX, 1; 19) и (IX, 1; 23), будем иметь

$$\frac{d^2}{dx^2} N_p(x) + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} N_p(x) + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) N_p(x) = 0. \quad \text{(IX, 1; 45)}$$

Ч. и т. д.

Что же касается линейной независимости функций J_p и N_p, то ее легко доказать.

В самом деле, при $p=0$ и $x \to 0$ функция $J_0(x)$ стремится к 1, тогда как $N_0(x)$ стремится к $-\infty$ как $\lg \frac{x}{2}$; при $p \geqslant 1$ и $x \to 0$ функция $J_p(x)$ стремится к 0 как x^p, а функция $N_p(x)$ стремится к $-\infty$ как $-x^{-p}$.

Следовательно, при ν, равном целому неотрицательному числу ($\nu = p \geqslant 0$), общее решение уравнения (XI, 1; 1) имеет вид

$$AJ_p(x) + BN_p(x), \tag{IX, 1; 46}$$

где A и B — постоянные.

Замечание. Формула (IX, 1; 21) определяет функцию $N_\nu(x)$ при *любом нецелом* ν, формула же (IX, 1; 22) определяет функцию $N_p(x)$ при *любом целом* p, положительном, отрицательном или равном нулю. Легко видеть, что в этом последнем случае

$$N_{-p}(x) = (-1)^p N_p(x). \tag{IX, 1; 47}$$

В самом деле, согласно формуле (IX, 1; 23), имеем

$$\pi N_{-p}(x) = \lim_{\nu \to -p} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x) - (-1)^p \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(x) \right), \tag{IX, 1; 48}$$

откуда, положив $\nu = -\lambda$, получим

$$\pi N_{-p}(x) = \lim_{\nu \to \infty} (-1)^p \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} J_\nu(x) - (-1)^p \frac{\partial}{\partial \lambda} J_{-\nu}(x) \right) = (-1)^p \pi N_p(x). \tag{IX, 1; 49}$$

Функции Ганкеля При любом комплексном ν две функции Ганкеля $H_\nu^{(1)}$ и $H_\nu^{(2)}$ с индексом ν определяются равенствами

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu + iN_\nu, \tag{IX, 1; 50}$$

$$H_\nu^{(2)} = J_\nu - iN_\nu. \tag{IX, 1; 51}$$

Эти функции снова являются решениями уравнения (IX, 1; 1). Мы предоставим читателю труд по проверке формул

$$H_{-\nu}^{(1)} = e^{i\nu\pi} H_\nu^{(1)}, \tag{IX, 1; 52}$$

$$H_{-\nu}^{(2)} = e^{-i\nu\pi} H_\nu^{(2)}, \tag{IX, 1; 53}$$

справедливых при любом ν. При ν, равном целому числу p, эти формулы записываются в виде

$$H_{-p}^{(k)} = (-1)^p H_p^{(k)}, \quad k = 1,\ 2. \tag{IX, 1; 54}$$

Замечание. Из равенств (IX, 1; 50) и (IX, 1; 51) получаем равенства

$$J_\nu = \frac{H_\nu^{(1)} + H_\nu^{(2)}}{2}, \qquad \text{(IX, 1; 55)}$$

$$N_\nu = \frac{H_\nu^{(1)} - H_\nu^{(2)}}{2i}. \qquad \text{(IX, 1; 56)}$$

Заметим, что если в формулах (IX, 1; 50), (IX, 1; 51), (IX, 1; 55) и (XI, 1; 56) заменить

$$H_\nu^{(1)} \text{ на } e^{ix}, \quad H_\nu^{(2)} \text{ на } e^{-ix},$$

$$J_\nu \text{ на } \cos x \quad \text{и} \quad N_\nu \text{ на } \sin x,$$

то получатся хорошо известные формулы!

2. Интегральные представления функций Бесселя. Рассмотрим комплекснозначную функцию $f_\nu(t)$ вещественного переменного t, определяемую равенством

$$f_\nu(t) = \begin{cases} (1-t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} & \text{при} \quad |t| < 1, \\ 0 \quad \text{при} \quad |t| > 1. \end{cases} \qquad \text{(IX, 1; 57)}$$

Функция $f_\nu(t)$ суммируема при $\operatorname{Re}\left(\nu + \frac{1}{2}\right) > 0$ и имеет преобразованием Фурье функцию

$$\mathcal{F} f_\nu = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} e^{-itx}\, dt \qquad \text{(IX, 1; 58)}$$

(см. гл. V, § 2, п. 7).

Мы собираемся показать, что при условии

$$\operatorname{Re}\left(\nu + \frac{1}{2}\right) > 0 \qquad \text{(IX, 1; 59)}$$

функция

$$Z_\nu(x) = x^\nu \mathcal{F} f_\nu \qquad \text{(IX, 1; 60)}$$

будет решением уравнения (IX, 1; 1).

Каково бы ни было целое число $m > 0$, функция $t^m f_\nu(t)$ будет суммируемой при выполнении условия (IX, 1; 59).

Следовательно, преобразование Фурье $\mathcal{F} f_\nu$ является бесконечно дифференцируемой функцией; в частности, имеем

$$(\mathcal{F} f_\nu)' = \mathcal{F}(-itf_\nu(t)),$$
$$(\mathcal{F} f_\nu)'' = \mathcal{F}(-t^2 f_\nu(t)). \qquad \text{(IX, 1; 61)}$$

Легко получаем

$$Z_\nu'' + \frac{1}{x} Z_\nu' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) Z_\nu = x^\nu (\mathcal{F} f_\nu + (\mathcal{F} f_\nu)'') + (2\nu + 1) x^{\nu-1} (\mathcal{F} f_\nu)'. \qquad \text{(IX, 1; 62)}$$

Но

$$\mathcal{F} f_\nu + (\mathcal{F} f_\nu)'' = \mathcal{F} f_{\nu+1} \qquad \text{(IX, 1; 63)}$$

в силу (IX, 1; 61).

Кроме того,

$$f'_{\nu+1} = -(2\nu + 1) t f_\nu(t). \qquad \text{(IX, 1; 64)}$$

Значит, $f'_{\nu+1}$ **суммируема** и выполняется равенство

$$x \mathcal{F} f_{\nu+1} = -i \mathcal{F}(f'_{\nu+1}). \qquad \text{(IX, 1; 65)}$$

Комбинируя первое соотношение (IX, 1; 61) с соотношениями (IX, 1; 65) и (IX, 1; 64), запишем правую часть равенства (IX, 1; 62) в виде

$$-ix^{\nu-1} \{\mathcal{F} [-(2\nu + 1) t f_\nu + (2\nu + 1) t f_\nu]\} = 0. \qquad \text{(IX, 1; 66)}$$

Ч. и т. д.

Функция $Z_\nu(x)$ ведет себя как x^ν при $x \to 0$, поэтому $Z_\nu(x)$ пропорциональна функции $J_\nu(x)$. Пусть a_ν — коэффициент пропорциональности. Тогда

$$\mathcal{F} f_\nu = a_\nu \frac{1}{2^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \qquad \text{(IX, 1; 67)}$$

откуда, при $x = 0$, получаем

$$\int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} dt = a_\nu \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}. \qquad \text{(IX, 1; 68)}$$

В левой части стоит $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \nu + \frac{1}{2}\right)$. Принимая во внимание формулы (VIII, 1; 12) и (VIII, 1; 15), находим значение a_ν:

$$a_\nu = 2^\nu \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right). \qquad \text{(IX, 1; 69)}$$

Окончательно мы получаем важную формулу

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-ixt}\,dt, \qquad \text{(IX, 1; 70)}$$

которая справедлива при $\operatorname{Re}\left(\nu+\frac{1}{2}\right) > 0$.

Замечание. Мы по-прежнему считаем условие (IX, 1; 59) выполненным. Поскольку

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \sin tx\,dt = 0, \qquad \text{(IX, 1; 71)}$$

имеем также формулы

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{itx}\,dt =$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos tx\,dt. \qquad \text{(IX, 1; 72)}$$

Другое интегральное представление Замена переменного $t = \cos\theta$ в представлении (IX, 1; 70) дает формулу

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{0}^{\pi} \sin^{2\nu}\theta\; e^{-ix\cos\theta}\,d\theta, \qquad \text{(IX, 1; 73)}$$

которая справедлива при $\operatorname{Re}\left(\nu+\frac{1}{2}\right) > 0$.

Мы предоставляем читателю получить той же заменой переменного из формул (IX, 1; 72) дополнительные формулы.

3. Рекуррентные соотношения. Докажем сначала формулу

$$-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu}J_\nu(x)\right) = x^{-(\nu+1)}J_{\nu+1}(x), \qquad \text{(IX, 1; 74)}$$

которую можно записать также в виде

$$J'_\nu(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x). \qquad \text{(IX, 1; 75)}$$

Формулу (IX, 1; 74) достаточно доказать при достаточно больших $\operatorname{Re}\nu$. Поскольку каждая из ее частей является аналитической функцией от ν, аналитическим продолжением по ν мы установим, что эта формула справедлива всюду (т. е. при всех ν).

Сделаем поэтому предположение (IX, 1; 59). Заметим, что коэффициент a_ν, определенный равенством (IX, 1; 69), удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{a_\nu}=\frac{2\nu+1}{a_{\nu+1}}. \qquad \text{(IX, 1; 76)}$$

Следовательно, из соотношений (IX, 1; 61) и (IX, 1; 64) вытекает соотношение

$$\frac{i\mathcal{F}\left(f'_{\nu+1}\right)}{a_{\nu+1}}=\frac{\left(\mathcal{F}f_\nu\right)'}{a_\nu}. \qquad \text{(IX, 1; 77)}$$

Если учесть равенство (IX, 1; 65), то это соотношение запишется в виде

$$-x\frac{\mathcal{F}f_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}=\frac{d}{dx}\frac{\mathcal{F}f_\nu}{a_\nu}, \qquad \text{(IX, 1; 78)}$$

а если учесть формулу (IX, 1; 67), то оно окончательно примет вид

$$-x\left(x^{-(\nu+1)}J_{\nu+1}(x)\right)=\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu}J_\nu(x)\right). \qquad \text{(IX, 1; 79)}$$

Это равенство есть не что иное, как формула (IX, 1; 74).

Равенство

$$J'_0(x)=-J_1(x) \qquad \text{(IX, 1; 80)}$$

является частным случаем равенства (IX, 1; 75).

Докажем теперь формулу

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right)=x^{\nu-1}J_{\nu-1}(x), \qquad \text{(IX, 1; 81)}$$

которую можно записать также в виде

$$J'_\nu(x)=-\frac{\nu}{x}J_\nu(x)+J_{\nu-1}(x). \qquad \text{(IX, 1; 82)}$$

Как и ранее, формулу (IX, 1; 81) достаточно доказать при достаточно больших $\operatorname{Re}\nu$. Мы предположим здесь, что $\operatorname{Re}\left(\nu-1+\frac{1}{2}\right)>0$. Тогда

$$\frac{2\nu-1}{a_\nu}=\frac{1}{a_{\nu-1}}. \qquad \text{(IX, 1; 83)}$$

С другой стороны,

$$(2\nu-1)f_\nu - tf'_\nu = (2\nu-1)f_{\nu-1}. \qquad \text{(IX, 1; 84)}$$

Следовательно,

$$\frac{\mathcal{F}\left((2\nu-1)f_\nu - tf'_\nu\right)}{a_\nu} = \frac{\mathcal{F}f_{\nu-1}}{a_{\nu-1}}. \qquad \text{(IX, 1; 85)}$$

В левой части стоит выражение

$$x\frac{d}{dx}\left(\frac{\mathcal{F}f_\nu}{a_\nu}\right) + 2\nu\frac{\mathcal{F}f_\nu}{a_\nu}, \qquad \text{(IX, 1; 86)}$$

поэтому окончательно имеем

$$x(x^{-\nu}J_\nu)' = -2\nu x^{\nu-1}J_\nu + x^{-\nu+1}J_{\nu-1}. \qquad \text{(IX, 1; 87)}$$

Это равенство есть не что иное, как формула (IX, 1; 82).

Применение формул (IX, 1; 70) и (IX, 1; 81). Вычисление функций $J_{\frac{1}{2}}$ и $J_{-\frac{1}{2}}$.

При $\nu = \frac{1}{2}$ формула (IX, 1; 70) принимает вид

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{x}{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-itx}\,dt = \sqrt{\frac{x}{2\pi}}\,\frac{1}{x}\,\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{i} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x. \qquad \text{(IX, 1; 88)}$$

Но по формуле (IX, 1; 81)

$$x^{-\frac{1}{2}}J_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x\right) = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x, \qquad \text{(IX, 1; 89)}$$

откуда

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x. \qquad \text{(IX, 1; 90)}$$

Отметим, что

$$N_{-\frac{1}{2}}(x) = J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \qquad \text{(IX, 1; 91)}$$

и

$$N_{\frac{1}{2}}(x) = -J_{-\frac{1}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x. \qquad \text{(IX, 1; 92)}$$

Обобщение формул (IX, 1; 74) и (IX, 1; 81). Обозначим буквой D_1 оператор $-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}$, а буквой D_2 — оператор $\frac{1}{x}\frac{d}{dx}$. Пусть l — целое число $\geqslant 1$,

Последовательным действием оператора D_1 из формулы (IX, 1; 74) легко выводится формула

$$D_1^l(x^{-\nu}J_\nu) = x^{-(\nu+l)}J_{\nu+l}. \qquad \text{(IX, 1; 93)}$$

Аналогично из формулы (IX, 1; 81) выводится формула

$$D_2^l(x^\nu J_\nu) = x^{\nu-l}J_{\nu-l}. \qquad \text{(IX, 1; 94)}$$

Функции Бесселя с целым индексом

4. Другие свойства функций Бесселя. Попытаемся разложить в ряд Фурье функцию $e^{ix\sin\theta}$, где x — параметр (который мы будем считать вещественным числом). Имеем

$$e^{ix\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(x)\, e^{ni\theta}, \qquad \text{(IX, 1; 95)}$$

где

$$a_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\sin\theta}e^{-ni\theta}\,d\theta. \qquad \text{(IX, 1; 96)}$$

Функцию $e^{ix\sin\theta}$ можно разложить в ряд по целым степеням аргумента:

$$e^{ix\sin\theta} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\, i^k x^k \sin^k\theta. \qquad \text{(IX, 1; 97)}$$

При фиксированном x этот ряд сходится нормально[1]), когда θ меняется от 0 до 2π; поэтому можно интегрировать почленно и, таким образом,

$$a_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^k\frac{1}{k!}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^k\, e^{-ni\theta}\,d\theta. \qquad \text{(IX, 1; 98)}$$

Предположим сначала, что число n — целое положительное или нуль. Разложим $(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^k$ по формуле бинома. Тогда интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^k\, e^{-ni\theta}\,d\theta \qquad \text{(IX, 1; 99)}$$

[1]) См. гл. I, § 3, определение 4; стр. 54. — *Прим. перев.*

будет равен нулю при любом k, кроме значения $k = n + 2m$, где $m \geqslant 0$. В этом последнем случае интеграл равен величине

$$(-1)^m C_{n+2m}^m \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = (-1)^m \frac{(n+2m)!}{m!\,(n+m)!}, \qquad \text{(IX, 1; 100)}$$

откуда

$$a_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^m \frac{1}{m!\,(n+m)!} = J_n(x). \qquad \text{(IX, 1; 101)}$$

При отрицательном n также легко получаем $a_n(x) = J_n(x)$.

Итак, при целом n

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \sin\theta} e^{-ni\theta}\, d\theta. \qquad \text{(IX, 1; 102)}$$

(Следовательно, функция Бесселя $J_n(x)$ является средним функции $e^{ix\sin\theta - in\theta}$ по интервалу периодичности.)

Кроме того,

$$e^{ix\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, e^{ni\theta}. \qquad \text{(IX, 1; 103)}$$

Формула (IX, 1; 103) записывается также в виде

$$e^{ix\sin\theta} = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos 2n\theta + 2i\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(x)\sin(2n+1)\theta, \qquad \text{(IX, 1; 104)}$$

откуда

$$\cos(x\sin\theta) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos 2n\theta \qquad \text{(IX, 1; 105)}$$

и

$$\sin(x\sin\theta) = 2\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(x)\sin(2n+1)\theta. \qquad \text{(IX, 1; 106)}$$

Асимптотическое разложение. Мы хотим изучить поведение функции $J_\nu(x)$ с вещественным ν, когда $x \to \infty$.

Положим

$$u_\nu(x) = \sqrt{x}\, J_\nu(x). \qquad \text{(IX, 1; 107)}$$

Легко видеть, что $u_\nu(x)$ является решением дифференциального уравнения

$$u'' + \left[1 - \left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{1}{x^2}\right] u = 0. \qquad \text{(IX, 1; 108)}$$

Таким образом, мы усматриваем интуитивно, что при $x \to \infty$ функция $u_\nu(x)$ стремится к некоторому решению уравнения

$$u'' + u = 0, \qquad \text{(IX, 1; 109)}$$

т. е. к некоторой тригонометрической функции. Можно аккуратно доказать (мы же примем это без доказательства), что при вещественном ν

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - (2\nu + 1)\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)^{1)}, \qquad \text{(IX, 1; 110)}$$

когда $x \to \infty$.

Таким образом, при $x \to \infty$ функция $J_\nu(x)$ ведет себя приближенно как функция

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - (2\nu + 1)\frac{\pi}{4}\right).$$

Заметим, что в силу формул (IX, 1; 88) и (IX, 1; 90) функция $J_\nu(x)$ при $\nu = \pm\frac{1}{2}$ в точности, а не приближенно равна функции

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - (2\nu + 1)\frac{\pi}{4}\right) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x & \text{при} \quad \nu = \frac{1}{2}, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x & \text{при} \quad \nu = -\frac{1}{2}. \end{cases} \qquad \text{(IX, 1; 111)}$$

Причем это равенство справедливо при всех x, а не только при достаточно больших x. Впрочем, легко видеть, что при $\nu = \pm\frac{1}{2}$ уравнение (IX, 1; 108) принимает вид

$$u'' + u = 0. \qquad \text{(IX, 1; 112)}$$

Используя определение (IX, 1; 21), из равенства (IX, 1; 110) получаем асимптотическое равенство

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - (2\nu + 1)\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \qquad \text{(IX, 1; 113)}$$

---

[1]) Равенство $g(x) = O(f(x))$ при $x \to \infty$ означает, что модуль $\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|$ остается ограниченным, когда $x \to \infty$.

при $x \to \infty$. Используя же определения (IX, 1; 50) и (IX, 1; 51), получаем асимптотические равенства

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x-(2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right)} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \qquad \text{(IX, 1; 114)}$$

и

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x-(2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right)} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \qquad \text{(IX, 1; 115)}$$

при $x \to \infty$.

Положительные нули функций Бесселя Мы хотим изучить распределение достаточно больших нулей функции $J_\nu(x)$ при вещественном ν.

Мы собираемся показать, что при $x \to \infty$ нули функции $J_\nu(x)$ приближенно совпадают с нулями функции $\cos\left(x-(2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right)$.

Заметим сначала, что в силу формулы (IX, 1; 110) нули функции $J_\nu(x)$ могут располагаться только в окрестностях нулей функции $\cos\left(x-(2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right)$.

Остается показать, что в окрестности некоторого нуля функции

$$\cos\left(x-(2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right)$$

имеется только один нуль функции $J_\nu(x)$.

Нули функции $\cos\left(x-(2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right)$ расположены в точках

$$x = (2\nu+1)\frac{\pi}{4} + (2n+1)\frac{\pi}{2}, \qquad \text{(IX, 1; 116)}$$

где n — целое. Нас интересуют здесь только положительные значения n ($n > 0$).

При заданном положительном ε существует $\eta > 0$, не зависящее от n и такое, что при выполнении условия

$$\left| x-(2\nu+1)\frac{\pi}{4}-(2n+1)\frac{\pi}{2} \right| < \eta \qquad \text{(IX, 1; 117)}$$

выполняется неравенство

$$\left| \cos\left(x-(2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right) \right| < \varepsilon. \qquad \text{(IX, 1; 118)}$$

Обозначим через I_n интервал

$$\left[(2\nu+1)\frac{\pi}{4}+(2n+1)\frac{\pi}{2}-\eta, \quad (2\nu+1)\frac{\pi}{4}+(2n+1)\frac{\pi}{4}+\eta\right].$$

Когда точка x пробегает этот интервал, функция $\cos\left(x-(2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right)$ переходит от значения $(-1)^n\varepsilon$ к значению $(-1)^{n+1}\varepsilon$. При $n\to\infty$ функция $J_\nu(x)$ имеет на левом конце интервала I_n тот же знак, что и число $(-1)^n\varepsilon$, а на правом конце $J_\nu(x)$ имеет тот же знак, что и $(-1)^{n+1}\varepsilon$. Таким образом, когда x пробегает интервал I_n, функция $J_\nu(x)$ меняет знак и, следовательно, имеет в этом интервале нечетное число нулей. Чтобы показать, что функция $J_\nu(x)$ имеет только один нуль, достаточно показать, что ее производная $J'_\nu(x)$ не обращается в нуль на интервале I_n. Но ведь в силу формулы (IX, 1; 45) имеет место асимптотическое равенство

$$J'_\nu(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-(2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \quad \text{(IX, 1; 119)}$$

при $x\to\infty$.

Поэтому нули функции $J'_\nu(x)$ могут располагаться только в окрестности нулей функции $\sin\left(x-(2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right)$, а в достаточно малой окрестности нуля функции $\cos\left(x-(2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right)$ нет нулей функции $\sin\left(x-(2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right)$.

Ч. и т. д.

Замечания. Мы по-прежнему предполагаем ν вещественным. При этом:

1. Если мы знаем положительные нули функции $J_\nu(x)$, то мы знаем и отрицательные нули, поскольку $J_\nu(-x)=e^{i\nu\pi}J_\nu(x)$.

2. Можно показать, что при $\nu>-1$ все нули функции $J_\nu(x)$ вещественны.

3. Заметим, что формулы (IX, 1; 88) и (IX, 1; 90) дают нам *все нули* функций $J_{\frac{1}{2}}(x)$ и $J_{-\frac{1}{2}}(x)$.

Нули функции $J_{\frac{1}{2}}(x)$ лежат в точках

$$n\pi, \text{ где } n \text{ — целое положительное, отрицательное или нуль.} \quad \text{(IX, 1; 120)}$$

Нули функции $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ лежат в точках

$$(2n+1)\frac{\pi}{2}, \text{ где } n \text{ — целое положительное, отрицательное или нуль.} \quad \text{(IX, 1; 121)}$$

При произвольном ν положим

Модифицированные функции Бесселя

$$I_\nu(x) = e^{-i\nu\frac{\pi}{2}} J_\nu(ix) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \qquad \text{(IX, 1; 122)}$$

и назовем *функцией Кельвина с индексом* ν функцию

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}(I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)). \qquad \text{(IX, 1; 123)}$$

Заметим, что

$$K_{-\nu} = K_\nu \quad \text{при любом } \nu, \qquad \text{(IX, 1; 124)}$$

$$I_{-n} = I_n \quad \text{при целом } n. \qquad \text{(IX, 1; 125)}$$

§ 2. Перечень формул

В этом параграфе мы перечислим формулы, установленные в предыдущем параграфе.

Мы считаем x вещественным положительным числом ($x > 0$).

Дифференциальное уравнение Бесселя

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0, \quad \nu \text{ — комплексное.} \qquad \text{(IX, 2; 1)}$$

Функция Бесселя с индексом ν

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \qquad \text{(IX, 2; 2)}$$

Частный случай:

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \qquad \text{(IX, 2; 3)}$$

Функция Неймана с индексом ν

$$N_\nu(x) = \frac{(\cos\nu\pi)\,J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \quad \text{при нецелом } \nu. \qquad \text{(IX, 2; 4)}$$

Если ν есть целое число n, то

$$N_n(x) = \lim_{\nu\to n} N_\nu(x). \qquad \text{(IX, 2; 5)}$$

Частный случай:

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi}\left\{\left(\lg\frac{x}{2} + \gamma\right)J_0(x) - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{1}{(k!)^2}\left(\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}\right)\right\}, \qquad \text{(IX, 2; 6)}$$

где γ — постоянная Эйлера.

Функции Ганкеля с индексом ν

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu + iN_\nu, \tag{IX, 2; 7}$$

$$H_\nu^{(2)} = J_\nu - iN_\nu, \tag{IX, 2; 8}$$

откуда

$$J_\nu = \frac{H_{(\nu)}^1 + H_\nu^{(2)}}{2}, \tag{IX, 2; 9}$$

$$N_\nu = \frac{H_\nu^{(1)} - H_\nu^{(2)}}{2i}. \tag{IX, 2; 10}$$

Функции Бесселя, Неймана и Ганкеля с целым индексом

При целом n имеем

$$J_{-n} = (-1)^n J_n, \tag{IX, 2; 11}$$

$$N_{-n} = (-1)^n N_n, \tag{IX, 2; 12}$$

$$H_{-n}^{(1)} = (-1)^n H_n^{(1)} \quad \text{и} \quad H_{-n}^{(2)} = (-1)^n H_n^{(2)}. \tag{IX, 2; 13}$$

Линейно независимые решения уравнения Бесселя

$H_\nu^{(1)}$ и $H_\nu^{(2)}$ при любом ν,

J_ν и $J_{-\nu}$ при нецелом ν,

J_n и N_n при целом $\nu = n$.

Интегральные представления функций Бесселя

При $\operatorname{Re}\left(\nu + \frac{1}{2}\right) > 0$ имеем

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} e^{\pm itx} dt, \tag{IX, 2; 14}$$

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_{0}^{1} (1 - t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} \cos tx\, dt, \tag{IX, 2; 15}$$

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_{0}^{\pi} e^{\pm ix\cos\theta} \sin^{2\nu}\theta\, d\theta, \tag{IX, 2; 16}$$

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos\theta) \sin^{2\nu}\theta\, d\theta, \tag{IX, 2; 17}$$

и, в частности,

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos\theta)\, d\theta. \tag{IX, 2; 18}$$

Рекуррентные соотношения

Положим

$$D_1 = -\frac{1}{x}\frac{d}{dx} \text{ и } D_2 = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}, \qquad \text{(IX,2; 19)}$$

тогда при целом $n \geqslant 0$ будем иметь

$$D_1^n\left(x^{-\nu}J_\nu\right) = x^{-(\nu+n)}J_{\nu+n}, \qquad \text{(IX, 2; 20)}$$

$$D_2^n\left(x^{\nu}J_\nu\right) = x^{\nu-n}J_{\nu-n}. \qquad \text{(IX, 2; 21)}$$

Производящая функция

Имеем

$$e^{ix\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\,e^{in\theta} \qquad \text{(IX, 2; 22)}$$

и

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\sin\theta}e^{-in\theta}\,d\theta. \qquad \text{(IX, 2; 23)}$$

Асимптотические разложения при вещественном ν и $x \to \infty$

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-(2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \qquad \text{(IX, 2; 24)}$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-(2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \qquad \text{(IX, 2; 25)}$$

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{i\left(x-(2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right)} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \qquad \text{(IX, 2; 26)}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{-i\left(x-(2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right)} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \qquad \text{(IX, 2; 27)}$$

Заметим, что *при любом* x имеют место *точные равенства*:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x = N_{-\frac{1}{2}}(x), \qquad \text{(IX, 2; 28)}$$

$$J_{-\frac{1}{2}}x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x = -N_{\frac{1}{2}}(x). \qquad \text{(IX, 2; 29)}$$

Преобразование Лапласа бесселевых функций

$$Y(t)\left(\frac{t}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)}J_{\nu-\frac{1}{2}}(t) \supset \left(\frac{1}{p^2+1}\right)^{\nu} \qquad \text{(IX, 2; 30)}$$

при $\operatorname{Re}\nu > 0$, $\operatorname{Re}p > 0$.

В частности,

$$Y(t)\,J_0(t) \supset \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}. \qquad \text{(IX, 2; 31)}$$

Модифицированные функции Бесселя

$$I_\nu(x) = e^{-i\nu\frac{\pi}{2}} J_\nu(ix) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \qquad \text{(IX, 2; 32)}$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}(J_{-\nu}(x) - I_\nu(x)), \qquad \text{(IX, 2; 33)}$$

функция Кельвина.

Имеем

$$K_{-\nu} = K_\nu \quad \text{при любом } \nu \qquad \text{(IX, 2; 34)}$$

и

$$I_{-n} = I_n \quad \text{при целом } n. \qquad \text{(IX, 2; 35)}$$

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ IX

Упражнение IX-1. Доказать формулы (IX, 1; 70) и (IX, 1; 72), используя разложение функций e^{itx}, e^{-itx} и $\cos tx$ в степенные ряды.

Упражнение IX-2. Доказать формулы (IX, 1; 74) и (IX, 1; 81), используя разложение функции $J_\nu(x)$ в степенной ряд.

Упражнение IX-3. 1°. Доказать, что при целом

$$J_n(a+b) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(a) J_{n-p}(b).$$

2°. Доказать, что

$$J_0\left(\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}\right) = J_0(a)J_0(b) + 2\sum_{p=1}^{\infty} J_p(a) J_{-p}(b)\cos p\alpha.$$

Упражнение IX-4. Пусть R — данное положительное число, а ω_1 и ω_2 — два таких положительных числа (ω_1, $\omega_2 > 0$), что

$$\omega_1 \neq \omega_2 \quad \text{и} \quad J_0(\omega_1 R) = J_0(\omega_2 R) = 0.$$

Показать, что

$$\int_0^R J_0(\omega_1 r) J_0(\omega_2 r)\, r\, dr = 0.$$

Упражнение IX-5. Вычислить в смысле теории распределений ***в пространстве*** R^2 величину

$$(\Delta + k^2) N_0(kr),$$

используя при этом метод, аналогичный методу, примененному в курсе для вычисления $\Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)$ в R^n.

Здесь N_0 — функция Неймана с индексом 0, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Упражнение IX-6. 1°. Непосредственно вычислить свертку

$$S = Y(x)\,J_0(kx) * Y(x)\,J_0(kx),$$

используя при этом разложения функций J_0 и J_1 в степенные ряды.

Здесь $Y(x)$ — функция Хевисайда. Воспользоваться без доказательства формулой

$$\sum_{m+n=l} \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = 1.$$

2°. Найти дифференциальный оператор D с постоянными коэффициентами, такой, что $DS = \delta$. Вычислить

$$D(Y(x)\,J_0(kx))$$

и получить отсюда свертку

$$Y(x)\,J_0(kx) * \frac{Y(x)\,J_1(kx)}{x}.$$

Упражнение IX-7. Имеет ли уравнение Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\,y = 0,$$

рассматриваемое в смысле теории распределений решения вида $\delta_0^{(m)}$?

Случай $\nu = 0$. Является ли функция N_0 решением этого уравнения в смысле теории распределений?

Упражнение IX-8. Доказать формулу

$$\int_0^z \cos(z - t)\,J_0(t)\,dt = zJ_0(z).$$

(Пусть $U(z)$ — неизвестный интеграл, он удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$U'' + U = -J_1,$$

откуда

$$U = zJ_0 + A\sin z + B\cos z.$$

Доказывается, что $A = B = 0$.)

Упражнение IX-9. Используя разложение функции J_0 в степенной ряд, доказать формулу

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(z\sin\theta)\,J_0(Z\cos\theta)\sin\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{J_1(\sqrt{Z^2+z^2})}{\sqrt{Z^2+z^2}}.$$

Упражнение IX-10. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-at} J_0(bt)\,dt,$$

используя формулу (IX, 2; 16) с $\nu=0$.

Упражнение IX-11. Показать, что

$$J_{\mu+\nu+1}(a) = \frac{a^{\mu+1}}{2^{\mu}\Gamma(\mu+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\nu(a\sin\theta)\sin^{\nu+1}\theta\cos^{2\mu+1}\theta\,d\theta.$$

Упражнение IX-12. 1°. Разложить $\cos(z\sin\theta)$ и $\sin(z\sin\theta)$ как функции от θ в ряды Фурье. Написать для них формулу Парсеваля. Вывести отсюда оценку для $|J_n(z)|$, не зависящую от вещественной части z.

2°. Показать, что

$$(m-1)\int_0^x t^m J_{n+1}(t)\,J_{n-1}(t)\,dt =$$

$$= x^{m+1}\left(J_{n+1}(x)\,J_{n-1}(x) - J_n^2(x)\right) + (m+1)\int_0^x t^m J_n^2(t)\,dt,$$

где n — целое положительное число и $m+2n+1>0$.

3°. Показать, что

$$J_{-n}(z)\,J_{n-1}(z) + J_{-n+1}(z)\,J_n(z) = \frac{2\sin n\pi}{\pi z}$$

(n — произвольное).

4°. Положим

$$\varphi_n(z) = \frac{J_{n+1}(z)}{zJ_n(z)}.$$

Показать, что функция $\varphi_n(z)$ удовлетворяет уравнению Рикатти.

5°. Положим $R^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos\theta$; $r_1 > r > 0$. Показать, что

$$J_0(R) = J_0(r)\,J_0(r_1) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(r)\,J_n(r_1)\cos n\theta,$$

$$N_0(R) = J_0(r)\,N_0(r_1) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(r)\,N_n(r_1)\cos n\theta.$$

6°. Показать, что

$$z^{2n} J_{2n+2}(z) = AJ_2(z) + BJ_0(z),$$

где A и B — полиномы от z степени $2n$. Вычислить $J_4(\sqrt{6}) + 3J_0(\sqrt{6})$ и $3J_6(\sqrt{30}) + 5J_2(\sqrt{30})$.

УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Л. Шварц

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

Художник *Л. Г. Ларский* Технический редактор *Е. С. Потапенкова*
Корректор *Т. П. Пашковская*

Сдано в производство 8/IX 1964 г. Подписано к печати 10/III 1965 г. Бумага 70×90[1]/16. бум. л. 12,88
печ. л. 30,1. Уч.-изд. л. 21,13. Изд. № 1/2138. Цена 1 р. 68 к. Зак. 721

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Государственного комитета Совета Министров СССР по печати. Измайловский проспект, 29.